1S **Étude de fonctions**

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

Objectif :

Après le chapitre sur la dérivation, faire un bilan et établir un plan lors d'une étude de fonctions.

(Ce plan d'étude sera complété au fur et à mesure de vos connaissances sur les fonctions)

Rappel :

Un des rôles des mathématiques est de créer des modèles formels pour résoudre des problèmes amenés par des situations physiques, économiques, sociologiques, ….

Beaucoup de ces phénomènes se ramènent à des problèmes d'optimisation, à des études de " comportement " d'une fonction …

L'outil " fonction dérivée " est un des principaux outils pour ces études.

Énoncé :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+4x-5}$

1) La première question à se poser : est-ce que le nombre $f(x)$ existe quel que soit le réel x ?
Autrement dit : déterminer l'ensemble de définition D_f de f ?
Cet ensemble D_f est-il un intervalle ? si non, écrire les intervalles un à un, puis préparer un grand tableau qui servira de synthèse après l'étude de variations … (*au crayon de bois*)

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

La démarche *:* $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 + 4x - 5 \neq 0$ (évident!)
Conséquence :
on résout l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$ pour " éliminer " de $\mathbb{R}$ les solutions afin d'obtenir D_f .
Résolution : (évident pour un élève de 1S en fin de premier trimestre) : discriminant $\Delta = b^2 - 4ac =$ …. d'où
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (faire les calculs)
on trouve : $\mathcal{S} = \{-5\ ;\ 1\}$
Conclusion : $D_f = \left]-\infty;-5\right[\cup\left]-5;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$
Le tableau en prévision ….

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$f'(x)$		‖	‖	
$f(x)$		‖	‖	

2) La deuxième question concerne l'étude des variations.
Sous cette forme, il est impossible de prévoir les variations de la fonction (aucune règle permettant d'utiliser les propriétés des fonctions usuelles et des opérations).
On va donc utiliser la dérivation ….
a) Pour tout $x \in D_f$, calculer $f'(x)$.
Le calcul n'est pas immédiat, il demande de la méthode et un minimum de temps …. pour être efficace, il ne

faut pas perdre de vue qu'on a besoin de déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
Dès que l'expression le permet, c'est bon !
Reconnaître la forme : $f(x)$ est le **quotient** de **$u(x) = x^2 - 3x - 4$ et de $v(x) = x^2 + 4x - 5$**

$u'(x) = 2x - 3 \qquad v'(x) = 2x + 4$

Écrire la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

et l'appliquer : $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x^2+4x-5)-(2x+4)(x^2-3x-4)}{(x^2+4x-5)^2}$

Calculer (*consigne très vague*) …. (ce peut-être " développer ", " factoriser ", " réduire " tout dépend de l'expression obtenue)

$f'(x) = \dfrac{(2x^3+8x^2-10x-3x^2-12x+15)-(2x^3-6x^2-8x+4x^2-12x-16)}{(x^2+4x-5)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^3+5x^2-22x+15-2x^3+2x^2+20x+16}{(x^2+4x-5)^2}$

$f'(x) = \dfrac{7x^2-2x+31}{(x^2+4x-5)^2}$

b) Établir le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et remplir consciencieusement le tableau préparé …..
(*il peut être utile de revoir la place des nombres déjà placés pour mettre en évidence les intervalles*)
Le dénominateur de $f'(x)$ étant un carré est strictement positif sur D_f .
Le numérateur est du second degré (air connu …) discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ = … (faire le calcul)
Comme $\Delta < 0$, le signe du numérateur est celui du coefficient 7 de x^2, donc, strictement positif
Nouveau tableau :

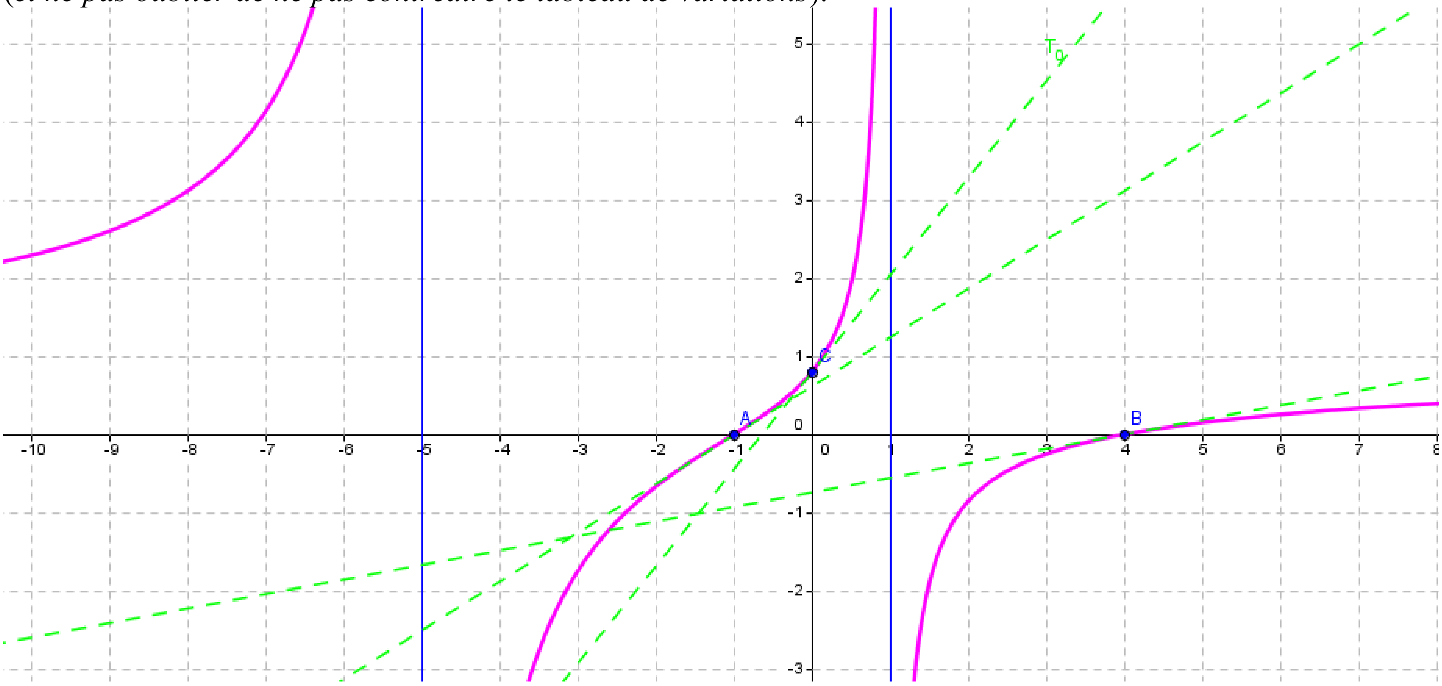
x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	||	+	
$f(x)$			||		||		

c) Donner les variations de f sur chaque intervalle ….. (*immédiat si le b) est bien fait*)
et calculer les valeurs numériques (exactes) qui apparaissent …..
Nouveau tableau :
la dérivée étant strictement positive, la fonction f est strictement croissante sur chaque intervalle de D_f .

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	||	+	
$f(x)$		↗	||	↗	||	↗	

3) La troisième question est le graphique et son analyse (*c'est aussi un bilan de l'étude précédente*).
Première étape :
commencer par graduer les axes de façon à faire " tenir " tout ce qui est apparu au 2c)/
Deuxième étape :
Tracer si elles existent les droites " verticales " correspondant aux abscisses exclues ….

(*Dans cet exercice, ces droites sont des asymptotes*).
On trace : d_1 d'équation $x = -5$ et d_2 d'équation $x = 1$
Troisième étape :
Placer les extremums locaux s'ils existent (et leurs tangentes " horizontales "), et/ou quelques points particuliers : intersection avec l'axe des abscisses, avec l'axe des ordonnées et les tangentes en ces points ….
On résout : $x^2 - 3x - 4 = 0$ (toujours la même chanson)
discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ On obtient : la courbe de f coupe l'axe des abscisses en deux points A(–1 ; 0) et B(4 ; 0)
On calcule $f'(-1) = \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$ (pour $\Delta x = 5$, on a : $\Delta y = 8$)
$f'(4) = \frac{145}{27^2} \approx$ ….
On calcule $f(0) = \frac{4}{5}$. On obtient : la courbe de f coupe l'axe des ordonnées en C$(0 ; \frac{4}{5})$
et $f'(0) = \frac{31}{25} = \frac{124}{100}$.
Dernière étape :
Chercher quelques points supplémentaires (tout dépend des informations déjà obtenues) pour finir le graphique …..
(*et ne pas oublier de ne pas contredire le tableau de variations*).



4) Ensuite, il s'agit d'interpréter les résultats selon le contexte ….

Recommencer avec $f(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{x^2+4x-5}$

1) Comme pour la fonction précédente, on a : $D_f =]-\infty;-5[\cup]-5;1[\cup]1;+\infty[$
d'où, le tableau en prévision ….

x	$-\infty$	-5		1		$+\infty$
$f'(x)$		‖		‖		
$f(x)$		‖		‖		

2) a) Pour tout $x \in D_f$,
$f(x)$ est le **quotient** de ***u* (*x*) = *x*² + 2*x* + 4 et de *v* (*x*) = *x*² + 4*x* – 5**

$u'(x) = 2x+2 \qquad v'(x) = 2x+4$

Comme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

$f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x^2+4x-5)-(2x+4)(x^2+2x+4)}{(x^2+4x-5)^2}$

Calculer (*consigne très vague*) …. (ce peut-être " développer ", " factoriser ", " réduire " tout dépend de l'expression obtenue)

$f'(x) = \dfrac{(2x^3+8x^2-10x+2x^2+8x-10)-(2x^3+4x^2+8x+4x^2+8x+16)}{(x^2+4x-5)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2-18x-26}{(x^2+4x-5)^2} = \dfrac{2(x^2-9x-13)}{(x^2+4x-5)^2}$.

b) Le dénominateur de $f'(x)$ étant un carré est strictement positif sur D_f .
Le numérateur est du second degré (air connu …) discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ = … (faire le calcul) ou forme canonique ou forme factorisée si évidente ...

Ici, on trouve : $\Delta = 81 + 52 = 133$ $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-\sqrt{133}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+\sqrt{133}}{2}$

Les valeurs approchées permettent de placer les nombres. $x_1 \approx -1{,}26$ $x_2 \approx 10{,}26$
La dérivée est positive à l'extérieur des racines et négative entre les racines, d'où le tableau de variations

x	$-\infty$		-5		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	**0**	–	‖	–	**0**	+	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	M_{ax}	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	m_{in}	$\nearrow$	1

(le calcul des limites n'est pas au programme de 1ère, vous pouvez pour ce type de fonctions interpréter grâce au tableur de votre calculatrice le comportement des images $f(x)$).

3) Intersection avec les axes :

axe des ordonnées : $f(0) = -\dfrac{4}{5}$ et $f'(0) = -\dfrac{26}{25}$ (≈ -1)
axe des abscisses : $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$ ne s'annule jamais
Il n'y a pas de points d'intersection avec l'axe des abscisses.

On peut remarquer que $f(x) = 1$ si et seulement si $x^2 + 2x + 4 = x^2 + 4x - 5$
si et seulement si $x = \dfrac{9}{2}$.

Une valeur approchée du **minimum** local est 0,92
Ce n'est pas discernable sans faire de zoom ….
Seule l'étude analytique permet de dire que f est strictement croissante sur $[x_2;+\infty[$.