Index

Prérequis

Vecteurs (Indispensable)

- relation de Chasles

- norme ($AB = \|\overrightarrow{AB}\|$)

- produit d'un vecteur par un réel (colinéarité)

Il doit être évident que :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est une égalité vérifiée **pour tous les points *A*, *B*, *C***

$AB + BC = AC$ est une égalité vérifiée **si et seulement si $B \in [AC]$**

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ est une égalité vérifiée **si et seulement si *ABC* est un triangle rectangle en *B*.**

Second degré : (calculs algébriques) recherche de la forme canonique, développement

Géométrie : figures particulières

triangles : triangles rectangles, triangles isocèles, triangles équilatéraux, triangles rectangles isocèles,

parallélogrammes, rectangles, losanges, carrés, ...

angles

I- Présentation du produit scalaire

I-1- Vocabulaire

Quelques définitions du dictionnaire :

(Source : Le Trésor de la Langue Française informatisé : http://atilf.atilf.fr/tlf.htm)

Scalaire :

MATH. Grandeur scalaire. Grandeur qui est suffisamment définie par sa mesure en fonction d'une certaine unité, par opposition aux grandeurs vectorielles. *Une longueur, une masse, un travail sont des grandeurs scalaires* (d'apr. *Lar. 20e*). *Produit scalaire de deux vecteurs*.

- *Produit scalaire de deux vecteurs.* „Produit de leur longueur par le cosinus de leur angle`` (*Sc.* 1962).

Vecteur :

MATH. Segment de droite orienté. *Un sens positif étant choisi sur la droite qui porte un vecteur AB, et une unité de longueur étant choisie, on appelle mesure algébrique de ce vecteur un nombre relatif positif si le vecteur a le sens positif, négatif s'il a le sens contraire, dont la valeur absolue est la mesure du segment AB* (P. THÉRON, *Math.,* classe de 4e, 1961, p. 92).
- *Vecteur équipollent. Vecteur libre.* „Vecteur dont l'origine n'est pas spécifiée`` (UV.-CHAPMAN 1956). *Vecteur lié.* Vecteur dont l'origine est fixe. (Dict. XXe s.). *Produit scalaire de deux vecteurs.*
SYNT. *Vecteur directeur d'une droite, d'une demi-droite; vecteur unitaire; vecteur de spin, de torsion; composantes, direction, extrémité, grandeur, mesure, module, norme, origine, sens, support d'un vecteur; addition, résultante, somme (géométrique) de deux vecteurs; vecteurs et tenseurs*.

Travail :

MÉCAN., PHYS. „Produit de l'intensité d'une force par la projection du déplacement de son point d'application sur la direction de la force`` (DEW. *Technol.* 1973). *Unité de travail; travail d'une machine; travail produit par un moteur.*

I-2- Quoi, pourquoi, comment ?

L'opération :

On multiplie deux vecteurs et on obtient un nombre réel (scalaire).

Ce que permet le produit scalaire :

- calculer des longueurs ;
- calculer des angles ;
- montrer l'orthogonalité ;
- déterminer des équations d'ensembles de points (Notamment : de droites, de cercles, ...), ...

Comment ?

En écrivant le même produit scalaire de deux façons différentes, on obtient une égalité. Selon les éléments connus et inconnus dans cette égalité, on en tire une équation.

I-3- Quelques calculs :

Les cas choisis sont des cas particuliers pour ne pas avoir de problèmes de signes. Les unités sont supposées convenablement choisies.

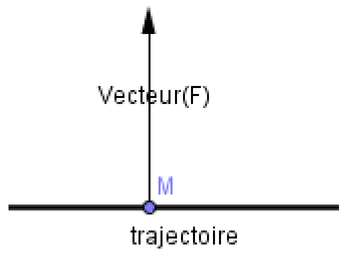
I-3-1- Travail d'une force

Le travail d'une force en physique, noté W, est obtenu en multipliant le $\overrightarrow{\text{vecteur Force}} = \vec{F}$ par le $\overrightarrow{\text{vecteur déplacement}} = \vec{d}$. $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$

On applique une force $\vec{F}$, d'intensité $\|\vec{F}\| = F$ à un mobile M qui se déplace sur un rail rectiligne.

d est la longueur du déplacement.

1er cas : La force est perpendiculaire au rail.



Le mobile ne bouge pas. Le travail de la force est nul.

Si $\vec{F} \perp \vec{d}$ alors $\vec{F} \cdot \vec{d} = 0$.

2ème cas : La force est parallèle au rail.

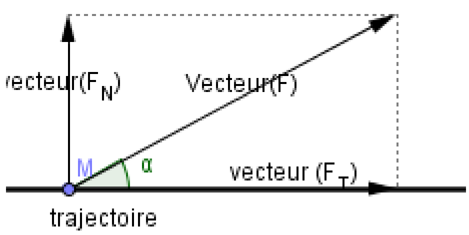
L'intensité de la force est entièrement utilisée pour le déplacement.

$W = F \times d$

Si $\vec{F}$ et $\vec{d}$ colinéaires et de même sens alors $\vec{F} \cdot \vec{d} = F \times d$

3ème cas : la force fait un angle α avec le rail.

On peut décomposer $\vec{F}$ en une somme $\overrightarrow{F_T} + \overrightarrow{F_N}$ où $\overrightarrow{F_T}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires et de même sens, et, $\overrightarrow{F_N}$ et $\vec{d}$ sont orthogonaux.



Seule l'intensité F_T est utile au déplacement. $W = F_T \times d = F \times d \times \cos \alpha$.

$\vec{F} \cdot \vec{d} = F_T \times d = F \times d \times \cos \alpha$.

Important : $\vec{F} = \overrightarrow{F_T} + \overrightarrow{F_N}$, $F^2 = F_T^2 + F_N^2$ mais, $F \neq F_T + F_N$.

I-3-2- Des calculs de longueurs :

On a appliqué une force $\vec{F}$, d'intensité $F = \|\vec{F}\|$, à un mobile M qui s'est déplacé d'une distance $d = \|\vec{d}\|$.

Le but des calculs suivants est de trouver des relations entre les longueurs.

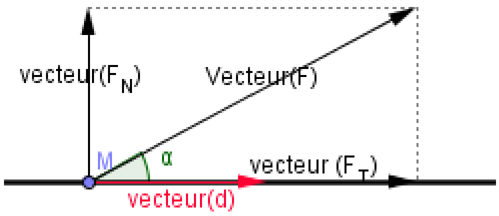
Pour cela, on va chercher à évaluer $\|\vec{F}+\vec{d}\|$ et $\|\vec{F}-\vec{d}\|$.

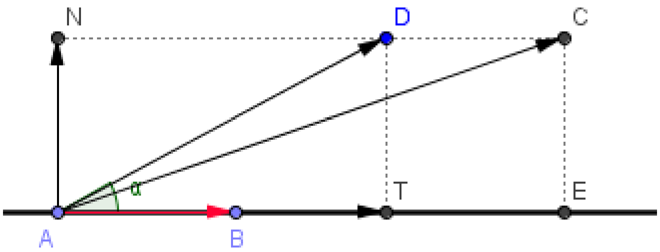
On construit donc : $\overrightarrow{AB} = \vec{d}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{F}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{F} + \vec{d}$

($ABCD$ est donc un parallélogramme).

Sur la figure suivante : $AN = F_N$, $AT = F_T$, $AD = BC = F$,

$AB = DC = TE = d$, $AC = \|\vec{F}+\vec{d}\|$, $BD = . \|\vec{F}-\vec{d}\|$.





$AC^2 = AE^2 + CE^2$

$AE^2 = (AT + TE)^2 = AT^2 + TE^2 + 2.AT.TE$ (Car, A, T, E alignés dans cet ordre).

$AC^2 = AT^2 + TE^2 + 2.AT.TE + CE^2$ Comme $AT^2 + CE^2 = F_T^2 + F_N^2 = F^2$ et $TE^2 = d^2$, on obtient :

$\|\vec{F}+\vec{d}\|^2 = \|\vec{F}\|^2 + \|\vec{d}\|^2 + 2.F_T.d$

D'après les observations du paragraphe précédent, comme $\overrightarrow{F_T}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires de même sens, **on pose** :

$\vec{F}\cdot\vec{d} = F_T.d.$ (Rappel : $[AT]$ étant le segment projeté orthogonal du segment $[AD]$ sur la droite (AB), on a : $AT = AD.\cos\alpha$ où $\alpha = \widehat{TAD}$). $\vec{F}\cdot\vec{d} = F_T.d = F.d.\cos\alpha$.)

On a donc : $\vec{F}\cdot\vec{d} = F_T\times d = \frac{1}{2}[\ \|\vec{F}+\vec{d}\|^2 - \|\vec{F}\|^2 - \|\vec{d}\|^2\ ]$

$BD^2 = BT^2 + TD^2 = (AT - AB)^2 + TD^2 = AT^2 - 2.AT.AB + AB^2 + TD^2$

Comme $AT^2 + TD^2 = F_T^2 + F_N^2 = F^2$ et $AB^2 = d^2$, on obtient :

$\|\vec{F}-\vec{d}\|^2 = \|\vec{F}\|^2 + \|\vec{d}\|^2 - 2.F_T.d$

On a donc : $\vec{F}\cdot\vec{d} = F_T\times d = \frac{1}{2}[\ \|\vec{F}\|^2 + \|\vec{d}\|^2 - \|\vec{F}-\vec{d}\|^2\ ]$

I-3-3- *Dans un repère orthonormé :*

Soit un repère orthonormé, on pose : $\vec{F}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$. On a donc : $\vec{F}+\vec{d}\begin{pmatrix}X+X'\\Y+Y'\end{pmatrix}$

On sait : $\|\vec{F}\|^2 = X^2 + Y^2$, $\|\vec{d}\|^2 = X'^2 + Y'^2$, $\|\vec{F}+\vec{d}\|^2 = (X+X')^2 + (Y+Y')^2 = X^2 + X'^2 + 2XX' + Y^2 + Y'^2 + 2YY'$.

Comme : $\vec{F}\cdot\vec{d} = \frac{1}{2}[\ \|\vec{F}+\vec{d}\|^2 - \|\vec{F}\|^2 - \|\vec{d}\|^2\ ]$, on en déduit :

$\vec{F}\cdot\vec{d} = XX' + YY'$.

II- Définition du produit scalaire :

Important : Chaque définition, chaque propriété doivent être liées à une construction géométrique.

Les différentes définitions doivent être liées entre elles.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.

Cas où l'un des deux vecteurs est nul.

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul $\vec{0}$ alors le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ (Réciproque fausse)

Cas où les deux vecteurs ne sont pas nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls du plan, on construit le triangle ABC tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et on note $\widehat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$.

Si $\widehat{A}$ est un angle aigu, alors $0 \leqslant \cos\widehat{A} \leqslant 1$.

Si $\widehat{A}$ est obtus, alors $-1 \leqslant \cos\widehat{A} \leqslant 0$,

Dans le chapitre de trigonométrie, on précisera davantage la notion d'angle de vecteurs noté $(\vec{u},\vec{v})$.

Dans les définitions suivantes, les deux notations $\cos\widehat{A}$ et $\cos(\vec{u},\vec{v})$ seront utilisés.

Les définitions équivalentes du produit scalaire :

II-1- à l'aide des normes et d'un angle ;

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls (sinon, $(\vec{u},\vec{v})$ n'est pas défini)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \cos\widehat{A}$

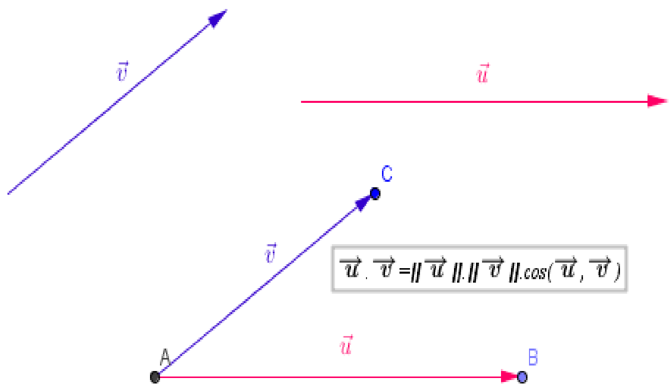


figure 1

A, B et C trois points distincts du plan. On note $\widehat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{A}$

Notamment : cas particuliers

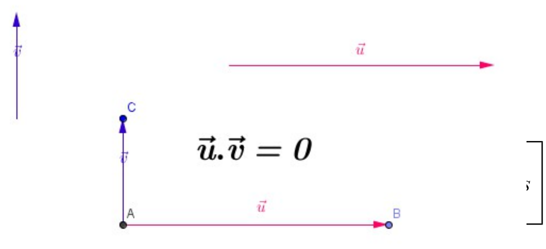


figure 2

$\vec{u} \perp \vec{v}$, on a alors : $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \cos \widehat{A} = 0$
d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens :
$\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \cos \widehat{A} = 1$
d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\|$

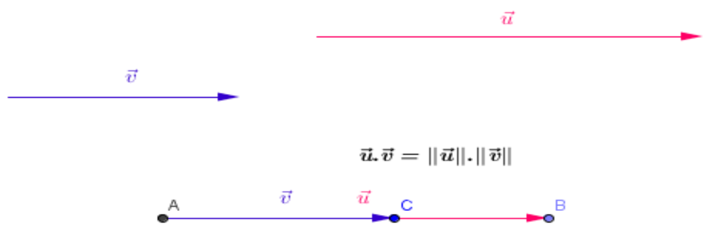


figure 3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraire :
$\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \cos \widehat{A} = -1$
d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = - \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\|$

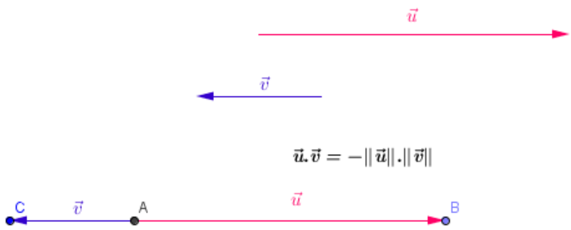


figure 4

II-2- par projection orthogonale ;

Soit *A*, *B*, *C*, des points du plan et *H* le projeté orthogonal de *C* sur (*AB*).

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires).

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB.AH$ si $\widehat{BAC}$ est un angle aigu.

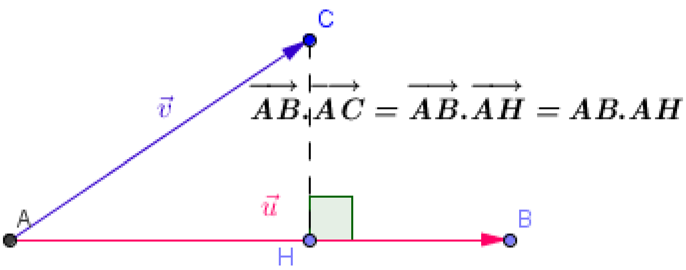


figure 5

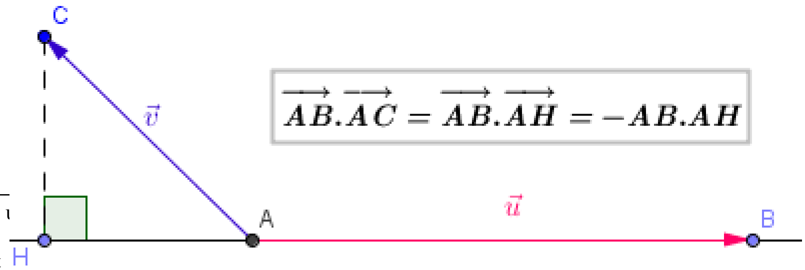


figure 6

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB.AH$ si $\widehat{BAC}$ est un angle obtus.

A, B, C, D sont des points du plan.

C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB).

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires).

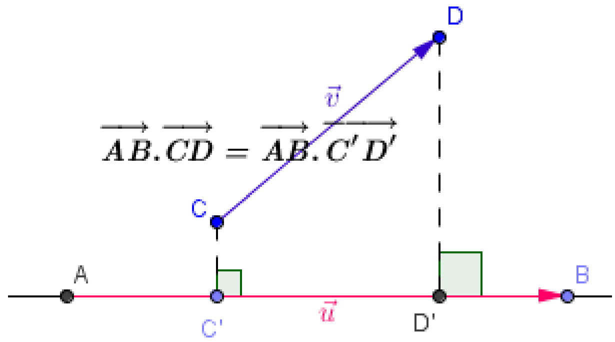


figure 7

Les figures de référence :

$\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, $\vec{t}$ ont le même projeté orthogonal $\vec{v}\,'$ sur $\vec{u}$.

On a alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{x} = \vec{u}\cdot\vec{t} = \vec{u}\cdot\vec{v}\,'$.

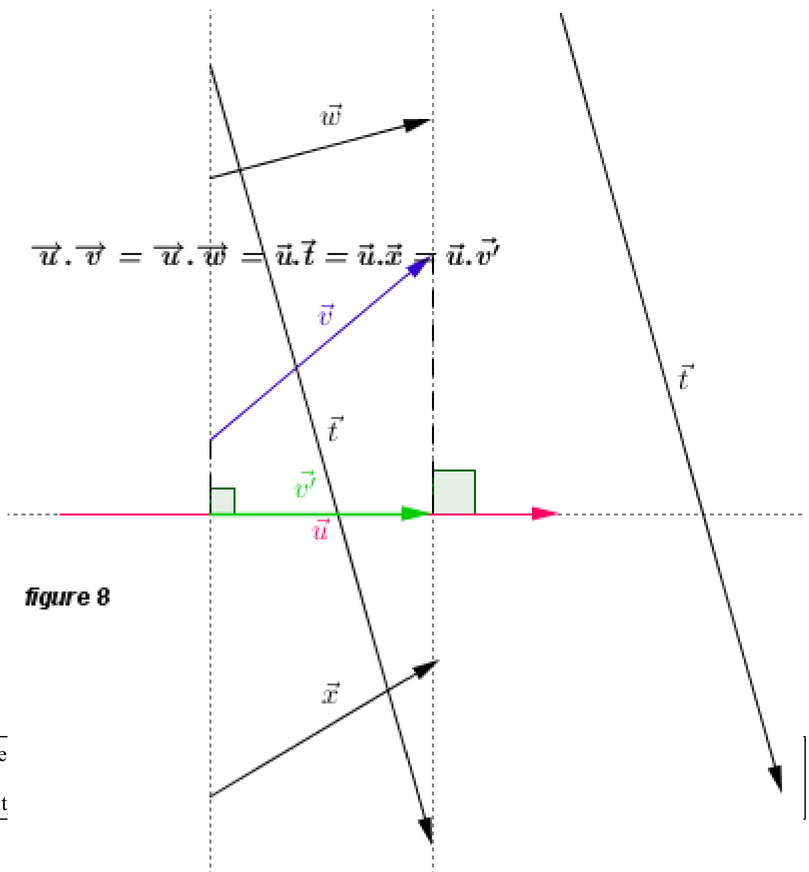


figure 8

H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K est le projeté orthogonal de B sur (AC).

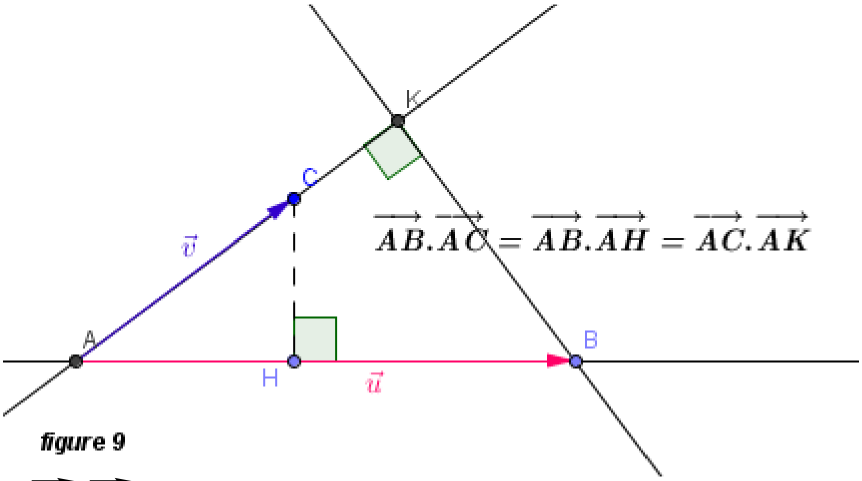


figure 9

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}$.

II-3- à l'aide des normes ;

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

En particulier : *ABDC* parallélogramme

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AD^2 - AB^2 - AC^2)$$

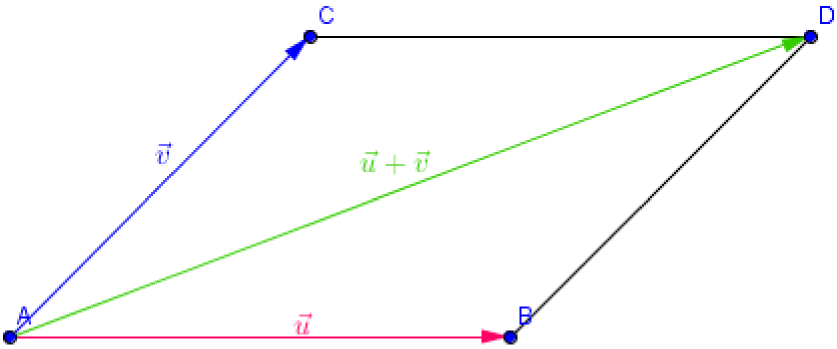


figure 10

II-4- analytiquement : dans un repère orthonormé.

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.

On sait : $\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = XX' + YY'$.

III- Orthogonalité- Normes

III-1- Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Remarque :

Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

III-2- Norme

Soit un vecteur $\vec{u}$.

La norme de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, vérifie : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$ (carré scalaire de $\vec{u}$)

Remarque :

Cette propriété est essentielle pour passer d'un calcul de longueur à un calcul sur les vecteurs (voir $ IV-5 par exemple)

IV- Propriétés algébriques du produit scalaire.

IV-1- Symétrie du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

IV-2- Distributivité

Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a : $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

IV-3- Multiplication par un réel.

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et, λ un réel, on a : $\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\lambda\vec{u}).\vec{v}$

IV-4- Identités remarquables .

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2.\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2.\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2.\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2.\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

IV-5- Autour de la médiane

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$, et, M un point quelconque.

On a : $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

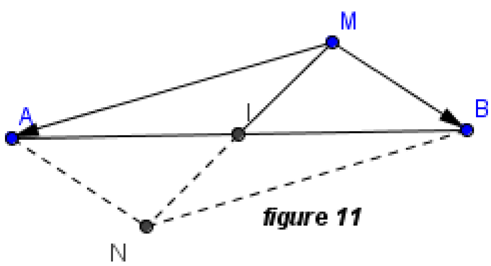


figure 11

Un premier calcul : évaluation de $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Un deuxième calcul : évaluation de $MA^2 + MB^2$

$$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2 = MI^2 + IA^2 + 2\cdot\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + MI^2 + IB^2 + 2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} =$$

$$= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\,\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}) \qquad \text{or, } \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

IV-6- Dans un triangle

Soit trois points A, B et C

On sait : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, d'où,

$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Dans un triangle ABC, on note $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.

Les angles à l'intérieur du triangle sont notés $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

On a donc d'après l'égalité précédente :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$.

De même :

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C}$.

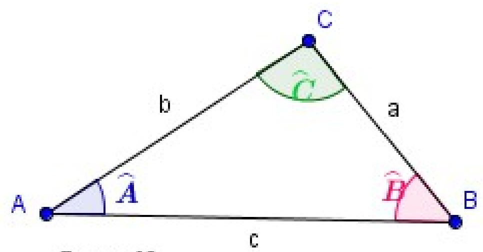


figure 12

(Le théorème de Pythagore devient un cas particulier de cette propriété appelée le théorème de Al-Kashi ou théorème de Pythagore généralisé).

V- Équations de droites et de cercles

V-1- Vecteur normal à une droite.

Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ (en ce cas : $\vec{u} \neq \vec{0}$).

Un vecteur normal à d est un vecteur $\vec{n}$, non nul, tel que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

Autrement dit : $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$

V-2- Équation d'une droite et vecteur normal.

Le plan est rapporté à un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit une droite d passant par un point $A(x_A ; y_A)$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Un point M appartient à d si et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux.

On a donc :

$M(x ; y) \in d$ si et seulement si $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

Or, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$, d'où, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = a(x - x_A) + b(y - y_A) = ax + by + c$ où $c = -ax_A - by_A$

Conclusion :

Une équation de la droite d et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est de la forme $ax + by + c = 0$

La réciproque est vraie

Rappel :

on sait que lorsque $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$, $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite d dont le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ vérifie : $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ puisque $-b.a + a.b = 0$.

$\vec{n}$ est donc un vecteur normal à d.

V-3- Équations d'un cercle

Le plan est rapporté à un repère **orthonormé** $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$.

V-3-1- Centre et rayon

Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(\alpha\ ;\ \beta)$ et de rayon r. (r positif)

Un point M appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\Omega M = r$

Les nombres étant positifs, l'égalité $\Omega M = r$ est équivalente à $\Omega M^2 = r^2$

Or, $\Omega M^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$

Conclusion :

Une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(\alpha\ ;\ \beta)$ et de rayon r est : $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.

V-3-2- Diamètre

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$.

Un point M appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $M = A$ ou $M = B$ ou AMB est un triangle rectangle.

On en déduit :

Un point M appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

Or, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B)$.

Conclusion :

Une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ est : $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

V-4- Exemples

Tous les repères sont orthonormaux.

V-4-1- cercles et tangentes au cercle

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(1\ ;\ 2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Déterminer une équation de ce cercle $\mathscr{C}$, les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et des axes des axes de coordonnées et une équation de chaque tangente en ces points.

Représenter $\mathscr{C}$ et ces tangentes.

Calculs : Une équation de $\mathscr{C}$: $M(x\ ;\ y) \in \mathscr{C}$ si et seulement si $AM = \sqrt{2}$

$M(x\ ;\ y) \in \mathscr{C}$ si et seulement si $AM^2 = 2$ (car $AM > 0$)

$M(x\ ;\ y) \in \mathscr{C}$ si et seulement si $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$

Intersection avec l'axe des abscisses : $\begin{cases} y=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=2 \end{cases}$, d'où, $(x - 1)^2 + 4 = 2$

$(x - 1)^2 = -2$ donc aucune solution.

Intersection avec l'axe des ordonnées : $\begin{cases} x=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=2 \end{cases}$, d'où, $1 + (y-2)^2 = 2$

$(y-2)^2 = 1$ qui équivaut à $y-2 = -1$ ou $y-2 = 1$

$\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points : $B(0\ ;\ 1)$ et $C(0\ ;\ 3)$.

Tangente en B.

La tangente T_B en B est la droite perpendiculaire à (AB) en B d'où :

$M(x\ ;\ y) \in T_B$ si et seulement si $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Or, $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'où,

$M(x\ ;\ y) \in T_B$ si et seulement si $-1\times x - (y-1) = 0$, soit : $y = -x + 1$

Tangente en C.

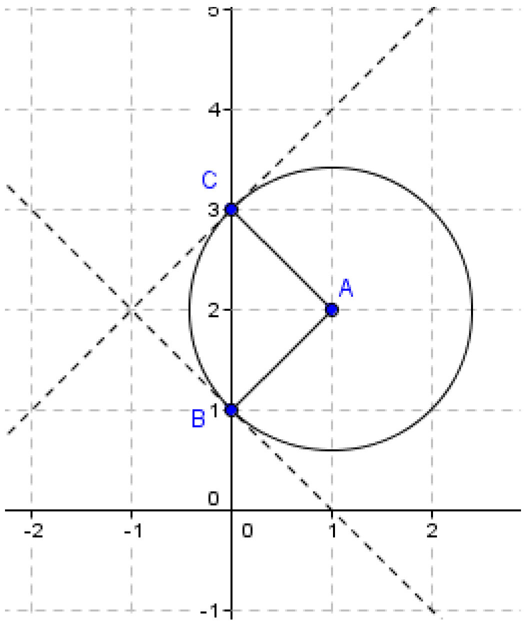
La tangente T_C en C est la droite perpendiculaire à (AC) en C d'où :

$M(x\ ;\ y) \in T_C$ si et seulement si $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Or, $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où,

$M(x\ ;\ y) \in T_C$ si et seulement si $-1\times x + (y-3) = 0$, soit : $y = x + 3$

Construction :



V-4-2 Intersection cercle et droite. (Prétexte à des calculs)

Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ où $A(4\ ;\ 2)$ et $B(-6\ ;\ 0)$ et de la droite d d'équation $y = 2x + 1$.

Donner une équation des tangentes en ces points en fonction de l'abscisse de ces points. (On ne cherchera pas à réduire les calculs)

Faire la construction.

Calculs :

Équation du cercle $\mathscr{C}$: $M(x\,;y) \in \mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+6 \\ y \end{pmatrix}$, d'où,

$M(x\,;y) \in \mathscr{C}$ si et seulement si $(x-4)(x+6) + y(y-2) = 0$

Intersection de $\mathscr{C}$ et d : les coordonnées des points d'intersection sont les solutions du système

$$\begin{cases} (x-4)(x+6)+y(y-2)=0 \\ y=2x+1 \end{cases}$$

Par substitution, on obtient une équation du second degré d'inconnue x :

$(x-4)(x+6) + (2x+1)(2x-1) = 0$

soit : $x^2 + 2x - 24 + 4x^2 - 1 = 0$

on résout : $5x^2 + 2x - 25 = 0$ $\quad\Delta = 4 + 500 = 504 = 36\times14$

Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-2-6\sqrt{14}}{2\times5} = \dfrac{-1-3\sqrt{14}}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-2+6\sqrt{14}}{2\times5} = \dfrac{-1+3\sqrt{14}}{5}$.

on calcule les ordonnées : $y_1 = \dfrac{-2-6\sqrt{14}+5}{5} = \dfrac{3-6\sqrt{14}}{5}$ et $y_2 = \dfrac{3+6\sqrt{14}}{5}$

Il existe deux points d'intersection : $I_1\left(\dfrac{-1-3\sqrt{14}}{5}\,;\,\dfrac{3-6\sqrt{14}}{5}\right)$ et $I_2\left(\dfrac{-1+3\sqrt{14}}{5}\,;\,\dfrac{3+6\sqrt{14}}{5}\right)$

Tangente en I_1

La tangente T_1 en I_1 est la droite perpendiculaire au rayon en I_1 d'où :

Soit C le centre du cercle : $C\left(\dfrac{4-6}{2};\dfrac{2+0}{2}\right)$, $C(-1\,;1)$

$M(x\,;y) \in T_1$ si et seulement si $\overrightarrow{I_1M}\cdot\overrightarrow{CI_1} = 0$

Or, $\overrightarrow{I_1M}\begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CI_1}\begin{pmatrix} x_1+1 \\ y_1-1 \end{pmatrix}$, d'où,

$M(x\,;y) \in T_1$ si et seulement si $(x-x_1)(x_1+1) + (y-y_1)(y_1-1) = 0$

Comme $y_1 = 2x_1 + 1$, on obtient : $(x-x_1)(x_1+1) + (y-2x_1-1)(2x_1) = 0$

Tangente en I_2 (ne pas tout refaire ...)

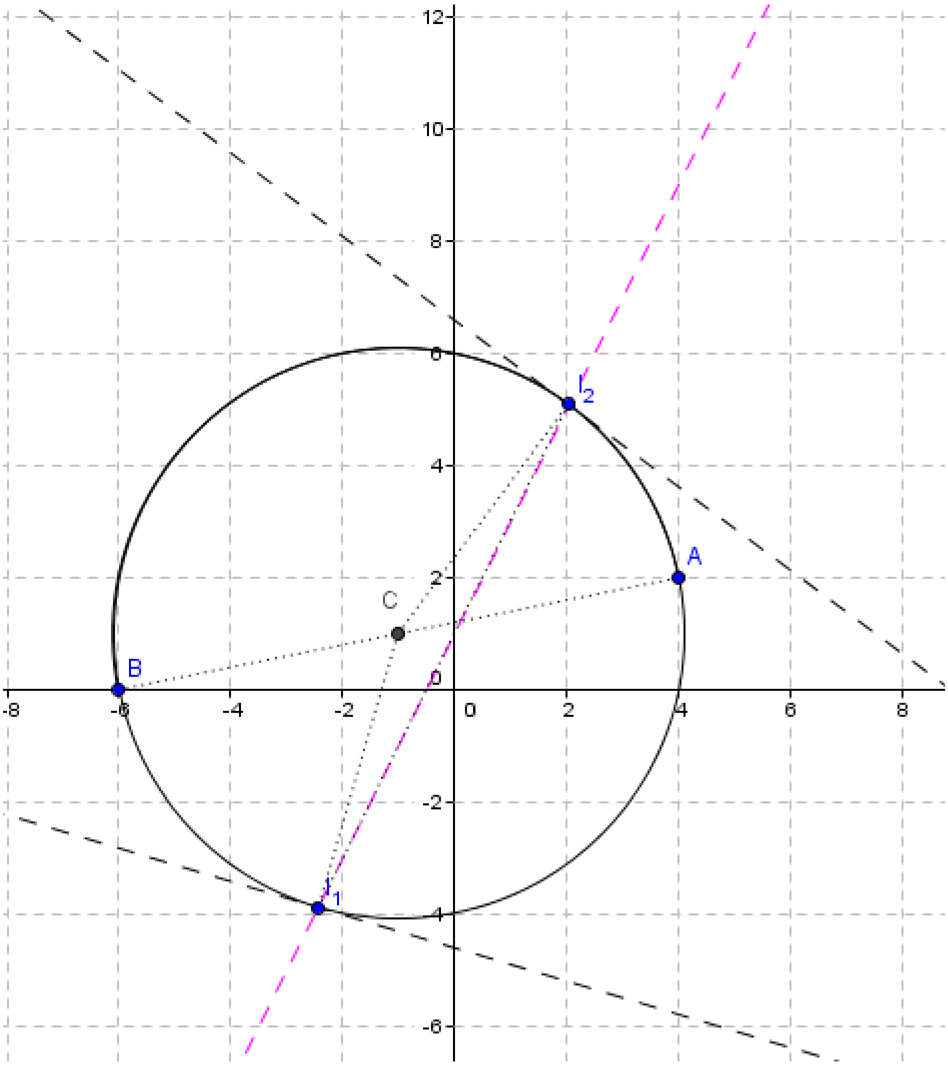
La tangente T_2 en I_2 a pour équation : $(x-x_2)(x_2+1) + (y-2x_2-1)(2x_2) = 0$

Construction :

On trace $\mathscr{C}$, puis, d (coefficient directeur 2, ordonnée à l'origine 1)

On place I_1 et I_2

On trace les perpendiculaires aux rayons en ces points I_1 et I_2 .



Exemple 3 : ensemble de points

a) Quel est l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points $M(x ; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$?

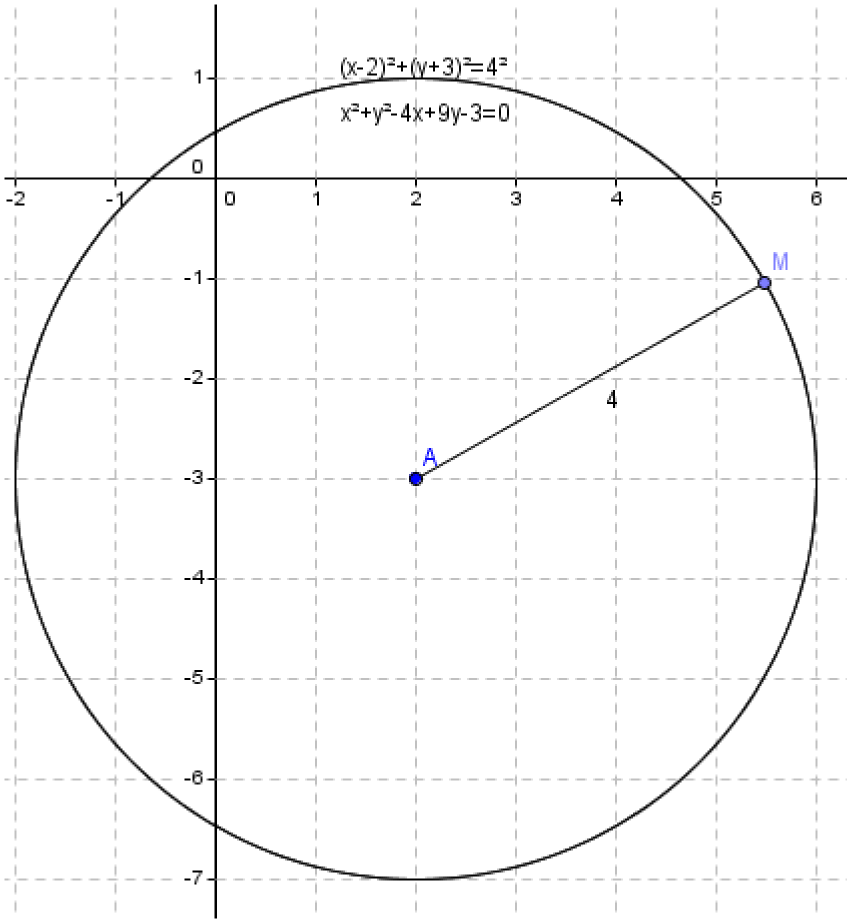
Représenter $\mathcal{E}_1$

b) Quel est l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points $M(x ; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 29 = 0$?

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ si et seulement si $(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ si et seulement si $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$

$\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre $\Omega(2 ; -3)$ et de rayon 4.



b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 29 = 0$ si et seulement si $(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 + 29 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 29 = 0$ si et seulement si $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = -16$

$\mathscr{E}_2$ est l'ensemble vide.

VI- Produit scalaire et trigonométrie

VI-1- Formules d'addition

A et B sont deux points du cercle trigonométrique associés aux réels a et b.

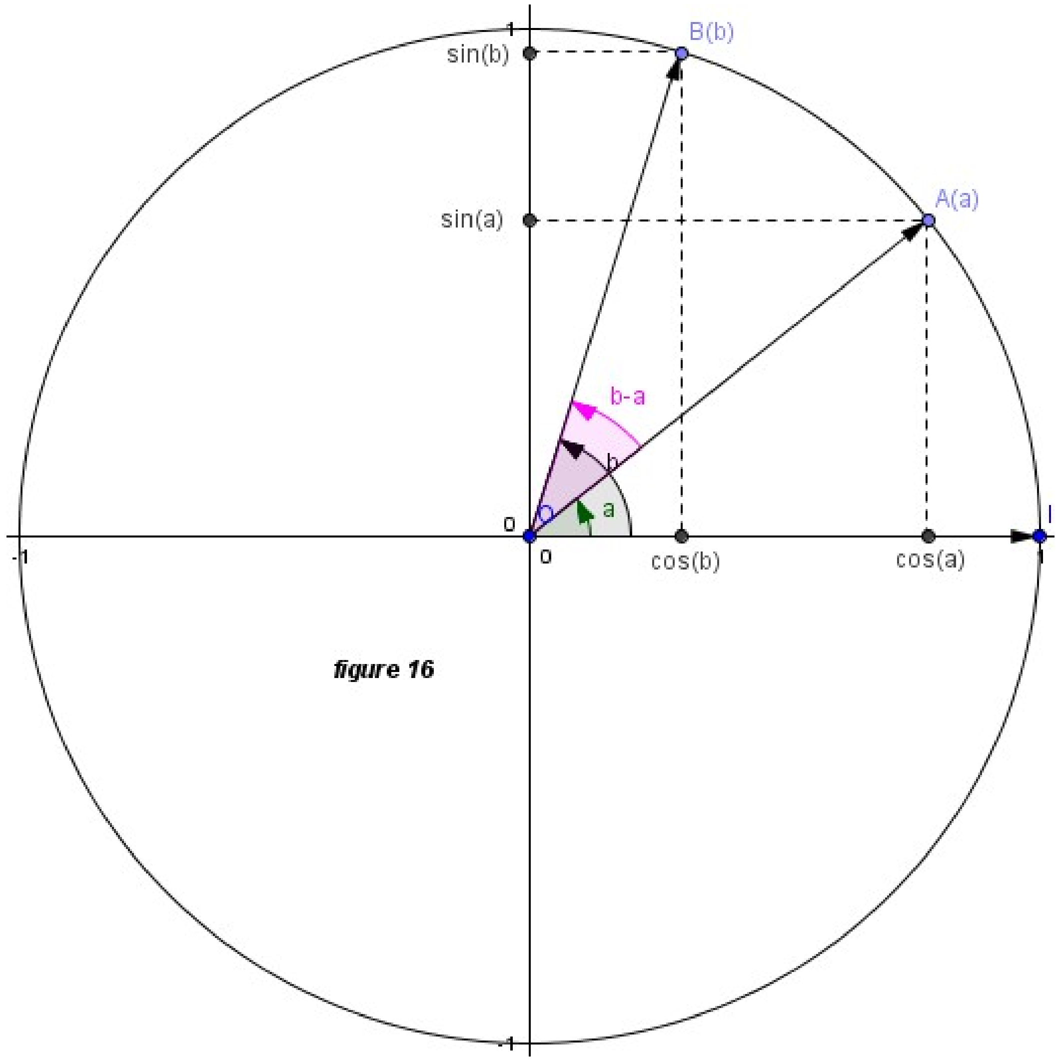


figure 16

On sait : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = b - a + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

On a donc : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = OB.OA.\cos(b - a) = \cos(b - a)$, car, $OA = OB = 1$

En outre : $b - a$ et $a - b$ sont des nombres réels opposés, d'où, $\cos(b - a) = \cos(a - b)$.

D'autre part : $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$.

On en déduit : $\cos(a - b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$.

En posant : $a + b = a - (-b)$, il vient :

$\cos(a + b) = \cos a.\cos(-b) + \sin a.\sin(-b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$.

En posant : $a = \frac{\pi}{2} - a$, il vient :

$\cos((\frac{\pi}{2} - a) - b) = \cos(\frac{\pi}{2} - a).\cos b + \sin(\frac{\pi}{2} - a).\sin b$.

Or, $\sin(a + b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a + b)) = \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b)$

$\sin(a + b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$.

sin($a - b$) = sin a.cos b – cos a.sin b.

Résumé :

cos($a - b$) = cos a.cos b + sin a.sin b. (1)
cos($a + b$) = cos a.cos b – sin a.sin b. (2)
sin($a + b$) = sin a.cos b + cos a.sin b. (3)
sin($a - b$) = sin a.cos b – cos a.sin b. (4)

VI-2- Formules de duplication.

En posant $b = a$ dans les formules (2) et (4)

cos(2a) = cos²a – sin²a. (5)

sin(2a) = 2sin$a$.cos$a$. (6)

et comme cos²a + sin²a = 1, il vient :

cos(2a) = 1 – 2sin²a (7)

cos(2a) = 2cos²a – 1 (8)

Remarque : sur les apprentissages.....

Connaître par cœur : (1) et (3) (ou (2) et (4)) et retrouver " instantanément " (2) et (4), et (5) et (6) , puis (7) et (8).

VI-3- Dans un triangle

$\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (idem avec $\cos\widehat{B}$ et $\cos\widehat{C}$) (voir $IV-6-)

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

Preuve : h étant la hauteur relative à [AC], $\sin\widehat{A} = \dfrac{h}{c}$ et $\sin\widehat{C} = \dfrac{h}{a}$, d'où, $h = c\times\sin\widehat{A} = a\times\sin\widehat{C}$ (1)

k étant la hauteur relative à [BC], $\sin\widehat{B} = \dfrac{k}{c}$ et $\sin\widehat{C} = \dfrac{k}{b}$, d'où, $k = c\times\sin\widehat{B} = b\times\sin\widehat{C}$ (2)

de (1), on tire : $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$ et de (2), on tire : $\dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}}$

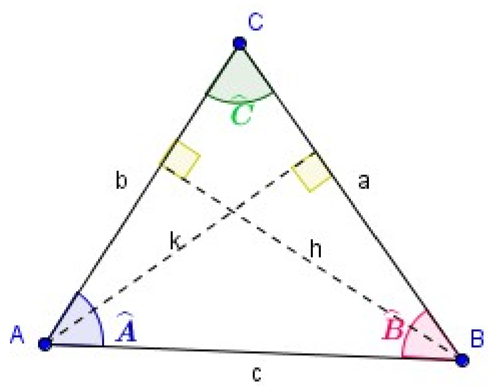


figure 17