Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

Index

Prérequis :

- Connaître la fonction carré

Les méthodes sont les habitudes de l'esprit et les économies de la mémoire. Rivarol

- Savoir développer
- Savoir factoriser (Notamment : utiliser les identités remarquables)
- Savoir utiliser les relations d'ordre

Remarques :

Les démonstrations faites en exercices et en travaux dirigés font partie du cours.

I- Fonction polynôme du second degré ou trinôme du second degré

I-1- Définitions

Une fonction polynôme du second degré est une fonction définie sur ℝ qui peut s'écrire sous la forme

$x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a est un réel non nul et, b et c deux réels.

Les réels a, b et c sont les **coefficients** du trinôme.

I-2- Exemples

Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont du second degré et donner les coefficients a, b et c.

$x \mapsto -x^2 + 3x - 4$ $\qquad t \mapsto 2t - 3t^2 + 5$ $\qquad x \mapsto x + 5(x - 4)$

$x \mapsto (x + 5)(x - 4)$ $\qquad u \mapsto 4u^2 - \dfrac{5}{u} + 1$ $\qquad x \mapsto 2x^2 + \sqrt{x}$

$x \mapsto 3 - 2x^2$ $\qquad x \mapsto t^2x + 2t - x$ $\qquad t \mapsto t^2x + 2t - x$

Remarques:

Pour appliquer les propriétés du cours qui va suivre, il est important d'ordonner le trinôme selon les puissances décroissantes.

Dans la suite du cours, *a* est un réel non nul.

I-3- Forme canonique

Objectif :

découvrir une méthode : ***méthode d'identification des coefficients.***

*Cette méthode est une méthode qu'on retrouve dans de nombreux contextes où on sait qu'on a une égalité pour **un ensemble de valeurs** et où certains coefficients sont inconnus.*

Il faut distinguer ces deux consignes :

1) Résoudre, dans l'ensemble des réels, l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$

2) Déterminer, s'ils existent, les réels a et b tels que, pour tout x, $ax^2 + 2x - 3 = x^2 + bx - 3$

I-3-1 Sur un exemple :

En seconde on a vu la forme canonique du second degré... Rappel : …..

Déterminer les coefficients α et β tels que $2x^2 + 6x + 8 = 2(x - \alpha)^2 + \beta$.

On trouve α = ….. et β = …..

I-3-2- Cas général

Montrer qu'on peut trouver des réels α et β tels que $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ en exprimant α et β en fonction de a, b et c.

On trouve α = ... $\qquad \beta$ = ...

Remarque importante :

ne pas chercher à retenir par cœur ces deux relations mais comprendre comment on les a trouvées.

La forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ est la **forme canonique** du trinôme.

II- Variations et représentation graphique d'une fonction du second degré.

II-1- Rappel : fonction carré

Dresser les tableaux de variations des deux fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -x^2$

II-2- Tableau de variations

Déduire du II-1, les tableaux de variations des fonctions $x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ lorsque $a>0$

$x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ lorsque $a<0$

II-3- Représentation graphique

Dans un repère, la représentation graphique de $x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ est une parabole d'équation $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ et de sommet $\Omega(\alpha; \beta)$

Si le repère est orthogonal, la parabole admet la droite d'équation $x=\alpha$ pour axe de symétrie.

Remarque :

Tous les résultats à suivre se retiennent en faisant le lien avec le graphique.

III- Applications et bilan

Soit $f(x) = ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta$

III-1- Cas a > 0 et β > 0

Justifier que dans le cas où $a>0$ et $\beta>0$ l'équation $f(x)=0$ n'a aucune solution.

En déduire que l'on ne peut pas factoriser l'expression ax^2+bx+c par un **raisonnement par l'absurde**.

Donner le signe de l'expression ax^2+bx+c pour tout x réel.

III-2- Cas a > 0 et β < 0

Justifier que dans le cas où $a>0$ et $\beta<0$ l'équation $f(x)=0$ a deux solutions distinctes.

Montrer que l'on peut factoriser l'expression ax^2+bx+c

Donner le signe de l'expression ax^2+bx+c pour tout x réel.

exemple :

$f(x) = ax^2+bx+c$ et on sait que : $a=2$, $f(-5)=0$, $f(1)=0$
- calculer α
- donner la forme factorisée
- donner la forme canonique
- donner la forme développée

Remarques :

Les cas $a<0$ et $\beta<0$, $a<0$ et $\beta>0$s'étudient de la même façon.

IV- Discriminant et calcul des racines

IV-1- Définitions

On a vu au I-3- que $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

On peut donc écrire : $ax^2+bx+c = a(x+\dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a} = a[(x+\dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}]$ *(Ne pas apprendre* *par cœur).*

On appelle **discriminant** le nombre, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Δ = b² – 4 ac.

On peut donc écrire : $ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$ *(Ne pas apprendre par cœur).*

On appelle **racines du polynôme** les valeurs qui annulent le polynôme

ou encore

les racines du polynôme sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Remarques :

* Lorsque $a > 0$, β (extremum de la fonction ou ordonnée du sommet) et Δ sont de signes opposés.
Lorsque $a < 0$, β (extremum de la fonction ou ordonnée du sommet) et Δ ont les mêmes signes.

** On a vu au III-1- que certains polynômes n'ont pas de racines réelles.

*** α (abscisse du sommet) est le milieu des racines x_1 et x_2 lorsqu'elles existent. $(\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a})$

IV-2- Formules

Si $\Delta < 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racines réelles.

si $\Delta = 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ a une racine double égale à $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et on peut écrire

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$$

si $\Delta > 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on peut écrire

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

IV-3- Signe du trinôme

Si $\Delta < 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ est du signe du coefficient a pour tout x réel.

Si $\Delta = 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ s'annule en $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Il est du signe du coefficient a pour tout x différent de α.

Si $\Delta > 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ s'annule en x_1 et x_2. Il est du signe du coefficient a pour les valeurs de x prises à l'extérieur des racines, du signe opposé au signe de a pour les valeurs de x prises entre les racines.

V- Algorithmes

Construire des algorithmes tels que

V-1- Centre d'un intervalle

On connaît les racines x_1 et x_2 d'un trinôme

Trouver α abscisse du sommet

V-2- Tout sur le second degré.

On connaît a, b, c coefficients du trinôme.

V-2-1 calcul du discriminant ...

Calculer Δ.

L'algorithme doit avoir une instruction permettant de dire : " ce n'est pas un trinôme du second degré " lorsque

$a = 0$

V-2-2- … et afficher la forme canonique …

Compléter l'algorithme pour obtenir la forme canonique.

V-2-3 … et les racines …

Compléter l'algorithme pour calculer les racines éventuelles.

V-2-4 … et la factorisation …

Compléter l'algorithme pour écrire la factorisation

V-2-5 … et le signe du trinôme

Compléter l'algorithme pour donner le signe du trinôme

VI- Les démonstrations à connaître

VI-1- Forme canonique

Une méthode :

Soit $a \neq 0$,

$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$.

Or, $x^2 + \frac{b}{a}x = (x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ (Penser au développement d'une somme au carré)

d'où, $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$.

En mettant la dernière somme au m^me dénominateur et en factorisant -1,

il vient : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$

Une autre méthode : (identification des coefficients)

Soit $a \neq 0$.

Pour **tout** x réel, on cherche à établir l'égalité $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

En développant le second membre, on a :

$ax^2 + bx + c = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta$.

Par identification des **coefficients** : $\begin{cases} \text{coefficient de degré 2} & : a = a \\ \text{coefficient de degré 1} & : b = -2a\alpha \\ \text{coefficient de degré 0} & : c = a\alpha^2 + \beta \end{cases}$

On en tire : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = c - a\alpha^2 = -\frac{b^2-4ac}{4a}$

VI-2- Démonstration des variations …

VI-2-1- Fonction carré

Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.

On cherche alors à classer x_1^2 et x_2^2, pour cela, on cherche le signe de la différence $x_2^2 - x_1^2$

Comme $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ et que $x_2 - x_1 > 0$, le signe de $x_2^2 - x_1^2$ est celui de $x_2 + x_1$.

Deux cas :

*** Si $0 \leqslant x_1 < x_2$ alors la somme $x_2 + x_1$ est strictement positive

Par conséquent : $x_2^2 - x_1^2$ est positif et $x_1^2 \leqslant x_2^2$.

On a montré :

Si $0 \leqslant x_1 < x_2$ alors $x_1^2 \leqslant x_2^2$,

ce qui prouve que la fonction carré est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$

*** Si $x_1 < x_2 \leqslant 0$ alors la somme $x_2 + x_1$ est strictement négative

Par conséquent : $x_2^2 - x_1^2$ est négatif et $x_1^2 \geqslant x_2^2$.

On a montré :

Si $x_1 < x_2 \leqslant 0$ alors $x_1^2 \geqslant x_2^2$,

ce qui prouve que la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0]$

VI-2-2- Trinôme du second degré.

Un peu de réflexion avant de se lancer dans des calculs :

L'intérêt de la forme canonique est que la variable x n'apparaît qu'une seule fois et que l'on peut faire le " montage " de fonctions suivant :

$x \mapsto x-\alpha \mapsto (x-\alpha)^2 \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$

La première fonction est une fonction affine strictement croissante.
La deuxième fonction est la fonction carré que l'on vient d'étudier.
la troisième fonction est une fonction affine de coefficient a. Ses variations dépendent du signe de a (voir cours de seconde).
Lorsqu'on applique la fonction carré au nombre $x-\alpha$, on doit savoir le signe de ce nombre $x-\alpha$.
D'où, les deux intervalles d'étude :
Sur $]-\infty\ ; \alpha]$, on a : $x-\alpha \leqslant 0$ et la fonction carré inverse l'ordre.
Sur $[\alpha\ ; +\infty[$, on a : $x-\alpha \geqslant 0$et la fonction conserve l'ordre.

Tout est prêt pour rédiger une démonstration :

cas $a > 0$		**cas $a < 0$**
$\alpha \leqslant x_1 < x_2$	la fonction $x \mapsto x-\alpha$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :	$\alpha \leqslant x_1 < x_2$
$0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$	La fonction carré étant strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$, on obtient :	$0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$
$0 \leqslant (x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$	Suivant le signe de a, la variation de la fonction affine : $x \mapsto ax+\beta$ sont croissante lorsque $a > 0$ décroissante lorsque $a < 0$	$0 \leqslant (x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$
$\beta \leqslant a(x_1-\alpha)^2+\beta < a(x_2-\alpha)^2+\beta$		$\beta \geqslant a(x_1-\alpha)^2+\beta > a(x_2-\alpha)^2+\beta$
La fonction est strictement croissante sur $[\alpha\ ; +\infty[$		La fonction est strictement décroissante sur $[\alpha\ ; +\infty[$

Étude analogue avec $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$

VI-3 Factorisation et racines

VI-3-1- Supposons $a > 0$ et $\beta > 0$.

On sait : $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta$.

La somme $a(x-\alpha)^2+\beta$ est donc strictement positive pour tout x réel (le **minimum** $\beta > 0$).

Conclusion : Pour tout x réel, $ax^2+bx+c>0$

Raisonnement par l'absurde :

Faisons l'hypothèse : le trinôme ax^2+bx+c est factorisable en produits de deux facteurs du premier degré, c'est-à-dire :

il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Dans cette hypothèse lorsque $x=x_1$ ou $x=x_2$, le polynôme s'annule puisque l'un des facteurs est nul.

Ceci est en contradiction avec la conclusion : Pour tout x réel, $ax^2+bx+c>0$.

On ne peut pas faire l'hypothèse : le trinôme ax^2+bx+c est factorisable

VI-3-2- Supposons $a > 0$ et $\beta < 0$.

β est un minimum et est strictement négatif.
La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_1 et x_2.

On sait aussi que $\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$

On sait : $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta=a[(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}]$ avec $\Delta=b^2-4ac>0$

et il existe donc un réel δ positif tel que $\Delta=\delta^2$ *($\delta=\sqrt{\Delta}$; lorsque $\Delta<0$, on ne peut pas écrire $\sqrt{\ }$ ...)*

$$ax^2+bx+c=a[(x-\alpha)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}]=a[(x-\alpha-\frac{\delta}{2a})(x-\alpha+\frac{\delta}{2a})]=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Autres cas

Les cas $a<0$ et $\beta<0$ et $a<0$ et $\beta>0$ sont analogues

$a<0$
Le **maximum** $\beta<0$, le trinôme ne s'annule pas.

Le **maximum** $\beta>0$, le trinôme s'annule en deux valeurs.

En résumé avec les tableaux de variations

$a > 0$ et $\beta > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$
signe		+		+	

$a > 0$ et $\beta < 0$

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	β	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe		+	**0**		–		**0**	+	

$a < 0$ et $\beta < 0$

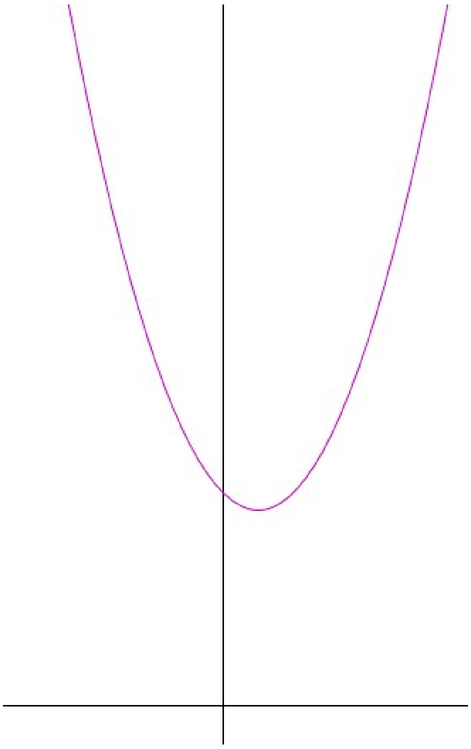
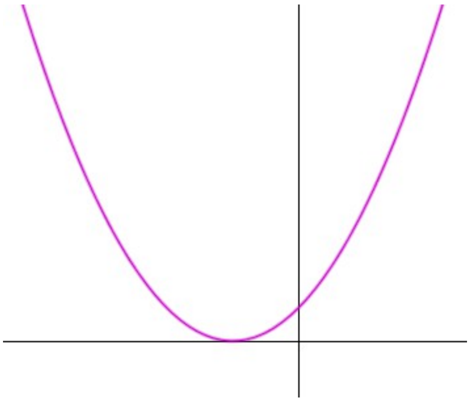
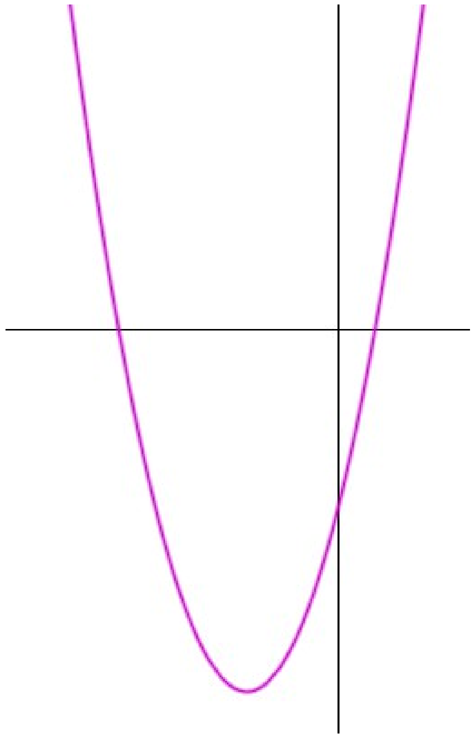
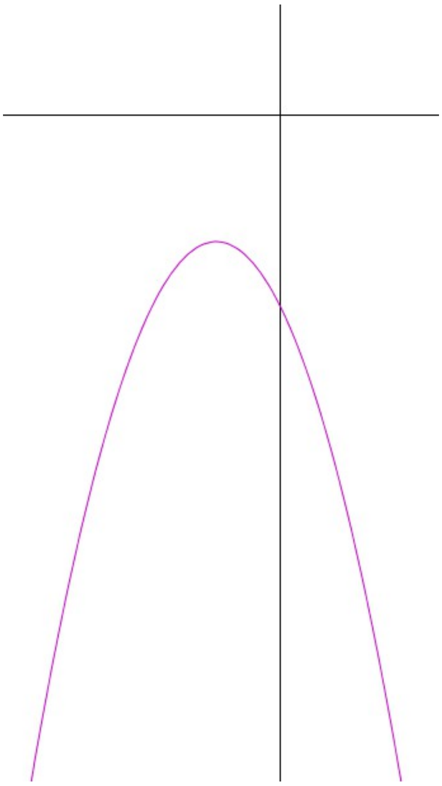
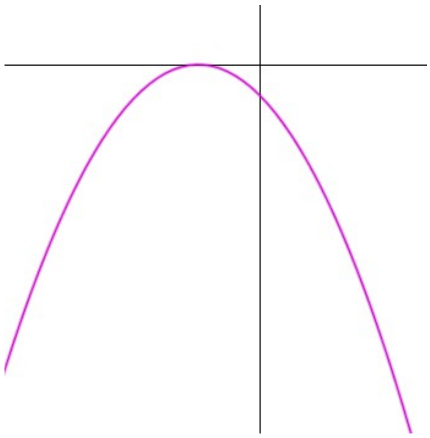
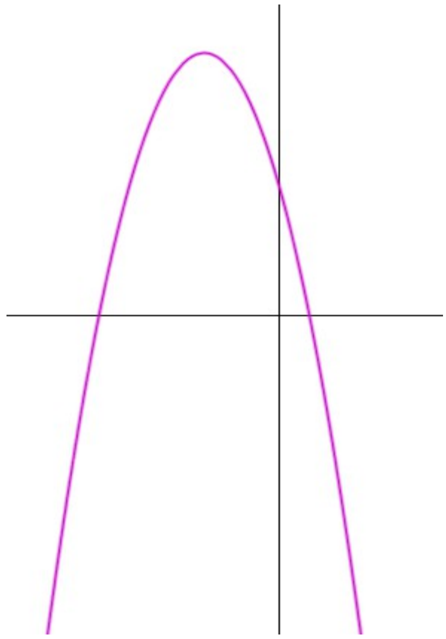
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	β	↘	$-\infty$
signe		–		–	

$a < 0$ et $\beta > 0$

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	β	↘	0	↘	$-\infty$
signe		–	**0**		+		**0**	–	

Ce qui permet aussi de déterminer le signe du trinôme :

VII- Bilan graphique

$a > 0$ et $\Delta < 0$	$a > 0$ et $\Delta = 0$	$a > 0$ et $\Delta > 0$
 aucune racine réelle, expression positive	 une racine double, expression factorisable (cf. identité remarquable), expression positive ou nulle	 deux racines réelles, expression factorisable, expression positive en-dehors des racines et négative entre les racines.
$a < 0$ et $\Delta < 0$	**$a < 0$ et $\Delta = 0$**	**$a < 0$ et $\Delta > 0$**
 aucune racine réelle, expression négative	 une racine double, expression factorisable (cf. identité remarquable), expression positive ou nulle	 deux racines réelles, expression factorisable, expression négative en-dehors des racines et positive entre les racines.