Index

Dans ce chapitre, sauf indication contraire, les lettres n et p utilisées dans les notations représentent des **entiers naturels.**

I- Qu'est-ce qu'une suite?

I-1- Numéroter, indice

Exemples:

1) On lance le dé indéfiniment, on relève le nombre sorti à chaque lancer dans l'ordre des lancers:

(2; 5; 5; 1; 3; 6; 4; 5; 1; 2; 6; 4; 1; 1; 2; 3; ....)

2) On prend la liste des élèves de 1S dans l'ordre alphabétique

3) On prend la n-ième décimale du nombre π.

I-1-1- Vocabulaire- Définitions

Soit une liste ordonnée de nombres, d'objets, ...

On a alors un premier élément de la liste, puis un deuxième, puis un troisième, ...

On peut les noter successivement u_1, u_2, u_3, ... (ou évidemment, toute autre lettre que u) et, on lit: u **indice** 1, u indice 2, u indice 3, ...

Dans l'exemple 1, on peut écrire: $u_1 = 2$; $u_2 = 5$, $u_3 = 5$, ...

Dans l'exemple 3, on peut écrire $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $v_3 = 1$, ...

On crée ainsi une **fonction** u (ou v ou ...), appelée **suite**, où l'ensemble de départ est l'ensemble des entiers naturels ℕ et l'ensemble d'arrivée est la liste ordonnée.

La suite est définie sur l'ensemble des entiers naturels ℕ.

À un entier naturel (numéro), on associe l'élément de la liste ayant le "numéro", l'indice correspondant.

Lorsque l'ensemble d'arrivée est une liste de nombre réels, on dit que la suite est une **suite numérique réelle**.

u: ℕ $\mapsto$ ℝ. À l'entier n, on associe un réel $u(n) = u_n$

u_n est appelé le **terme général** de la suite u ou (u_n)

Dans un repère, la suite u ou (u_n) est représentée par des points de coordonnées (n, u_n) où $n \in$ ℕ.

Attention à la signification des notations:

Les parenthèses ( ) sont là pour indiquer qu'on considère la liste ordonnée.

Dans l'exemple 2, la notation u_n désigne le n-ième élève dans la liste de 1S.

(u_n) désigne la classe de 1S classée dans l'ordre alphabétique.

I-1-2- Manipuler les indices

On commence l'indexation à 0 dans beaucoup de cas.

Par exemple, le capital déposé au départ sera noté C_0 et le capital l'année suivante C_1 .

La population l'année de référence (année 0) sera notée P_0 et la population à l'année n (c-à-d: $0 + n$) sera notée P_n.

Exemple :

L'année 2000, la population P_0 d'une ville en expansion était de 1 500 habitants.

Chaque année, la population augmente de 100 habitants.

On note P_n la population en l'année $2000 + n$.

Calculer P_1 , P_2 ,

Exprimer P_n, P_{n+1}, P_{n+10}, P_{2n} en fonction de n.

Exprimer $P_n + 10$, $2\times P_n$ en fonction de n.

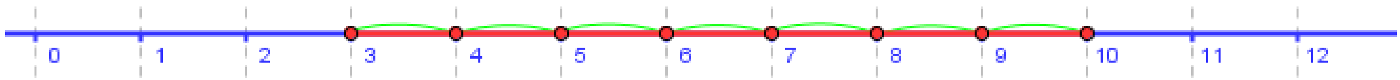
I-1-3- Compter le nombre de termes, compter le nombre d'étapes, piquets et intervalles

Exemple:

Placer les entiers 3 et 10 sur un axe.

En comptant 3 et 10, combien y a-t-il d'entiers de 3 à 10 ? (Notez bien que 3 et 10 sont inclus).

Combien y a-t-il d'intervalles de bornes entières entre 3 et 10?



Cas général de p à n.

Soit deux entiers p et n tels que $p < n$.

De p à n inclus, on compte $n - p + 1$ entiers et $n - p$ intervalles.

Dans une suite (u_n), il y a $n - p + 1$ termes de u_p à u_n inclus

mais, il y a $n - p$ étapes

I-2-Créer ou générer une suite.

I-2-1- Suite explicite (en fonction de n) ou suite de la forme $u_n = f(n)$

Lorsque le terme général u_n de la suite (u_n) est exprimé en fonction de n et indépendamment des autres termes de la suite, on dit que la suite (u_n) est définie de manière explicite.

On peut écrire $u_n = f(n)$ où f désigne une fonction.

Exemple:

Soit (u_n) définie par le terme général $u_n = -n^2 + 2n + 1$.

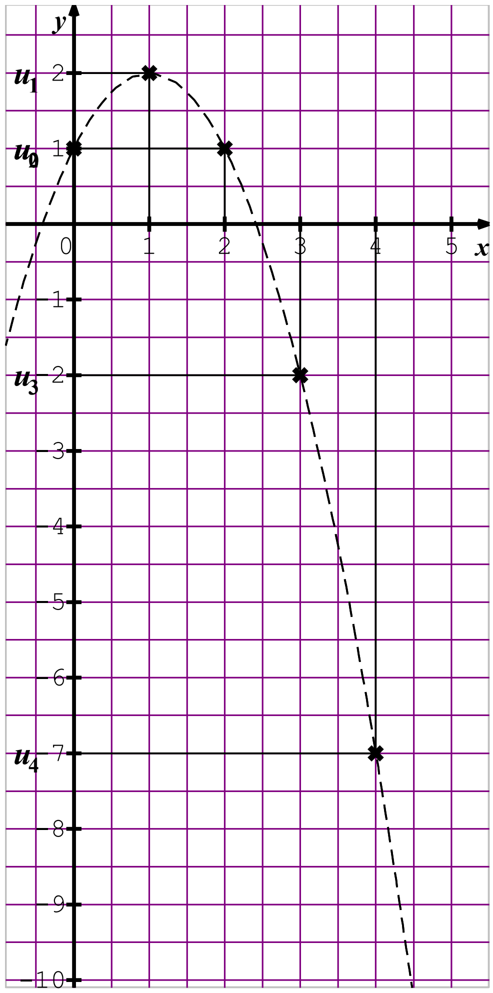
Calculer u_0, u_1, u_2

Exprimer u_{n+1}, u_{2n} en fonction de n.

Exprimer $u_n + 1$, $2u_n$ en fonction de n.

Représenter une suite explicite

Pour représenter une suite définie de façon explicite, on représente dans un repère du plan l'ensemble des points M de coordonnées (n, u_n) où $n \in \mathbb{N}$.



La suite u ou (u_n) définie par le terme général $u_n = -n^2 + 2n + 1$ est représentée par les points. (La courbe en pontillés n'est pas représentative de la suite u)

Il est parfois intéressant de ne considérer que les images représentées sur un axe (vertical ou horizontal).

I-2-2- Suite définie par récurrence

Dans le dictionnaire http://atilf.atilf.fr (*Le Trésor Informatique de la Langue Française*)

Récurrent : *LOG., MATH.* Qui se fonde sur le stade précédent pour effectuer le suivant.

Lorsqu'une suite est définie par la donnée de ses premiers termes et par la relation exprimant un terme en fonction de termes qui le précèdent, on dit que la suite est **définie par récurrence**.

Exemples:

1) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n + 1 \end{cases}$

$u_0 = 3$ (donnée du premier terme)

Dans l'égalité, en faisant $n = 0$, on a: $u_1 = -u_0^2 + 2u_0 + 1 = -9 + 2\times 3 + 1 = -2$,

puis en faisant $n = 1$, on a: $u_2 = -u_1^2 + 2u_1 + 1 = -4 + 2\times(-2) + 1 = -7$

puis en faisant $n = 2$, on a: $u_3 = -u_2^2 + 2u_2 + 1 = -49 + 2\times(-7) + 1 = -62$

2) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n + 1 \end{cases}$

$u_0 = 0$ (donnée du premier terme)

Dans l'égalité, en faisant $n = 0$, on a: $u_1 = -u_0^2 + 2u_0 + 1 = 1$,

puis en faisant $n = 1$, on a: $u_2 = -u_1^2 + 2u_1 + 1 = -1 + 2\times1 + 1 = 2$

puis en faisant $n = 2$, on a: $u_3 = -u_2^2 + 2u_2 + 1 = -4 + 2\times2 + 1 = 1$

3) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$ (Cette suite s'appelle **suite de Fibonacci**)

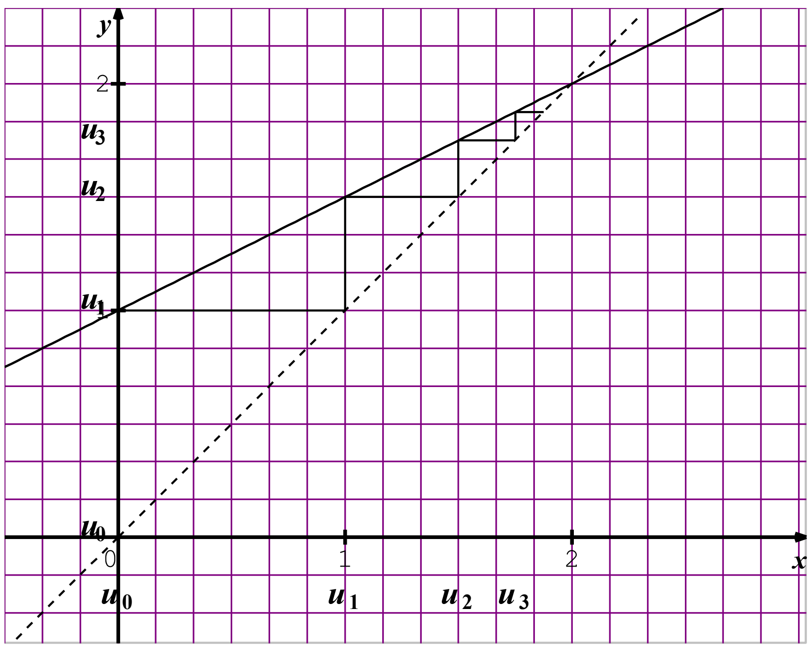
$u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + 1 = 2$, $u_3 = 2 + 1 = 3$, $u_4 = 3 + 2 = 5$, $u_5 = 5 + 3 = 8$, $u_6 = 13$, $u_7 = 21$, $u_8 = 34$ ...

Représenter une suite définie par récurrence. $u_{n+1} = f(u_n)$

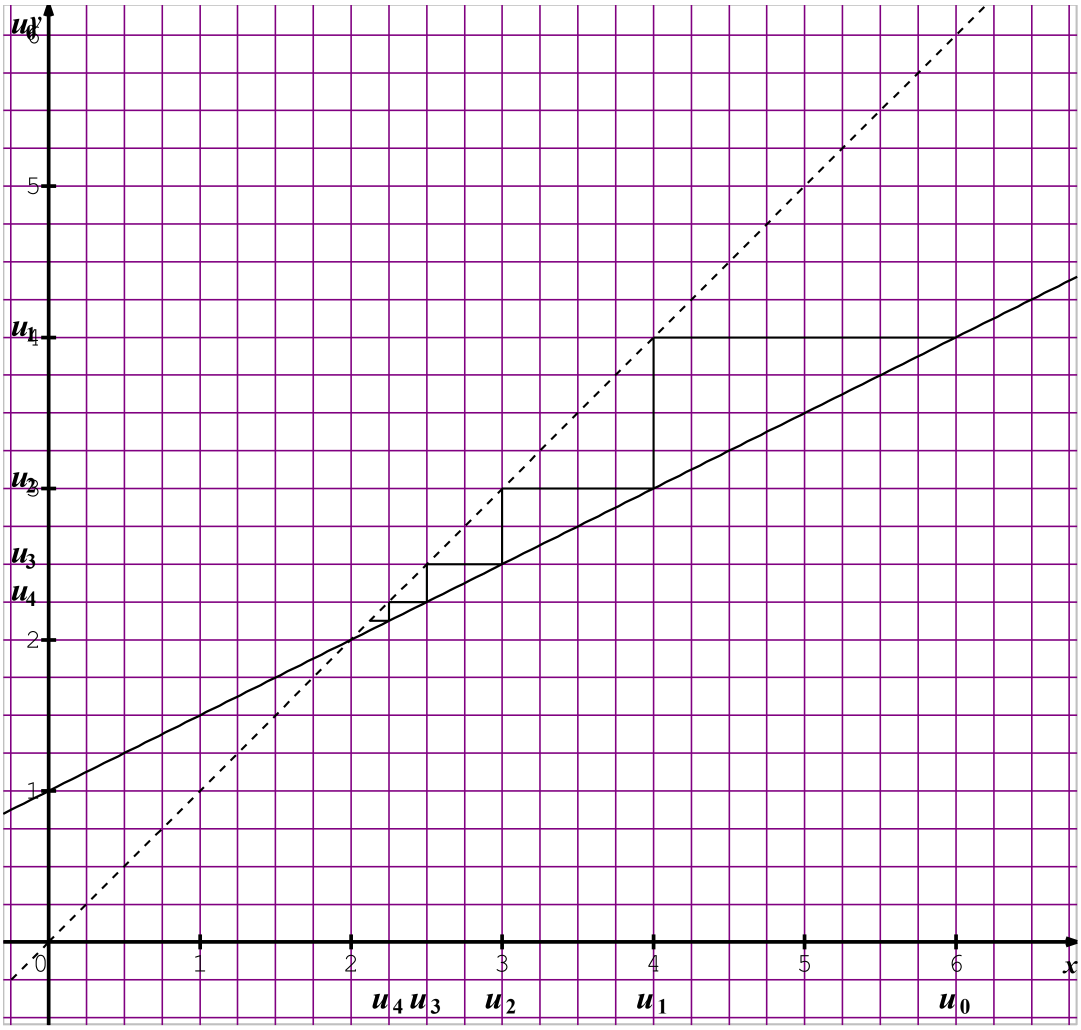
Quelques exemples :

Prévoir une grande feuille à carreaux ....

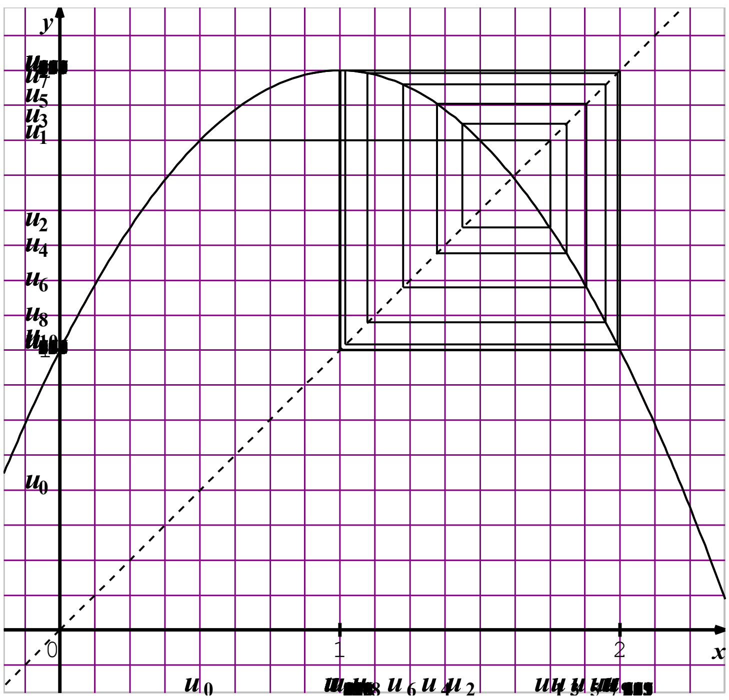
Exemple 1 : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 1$ et $u_0 = 0$



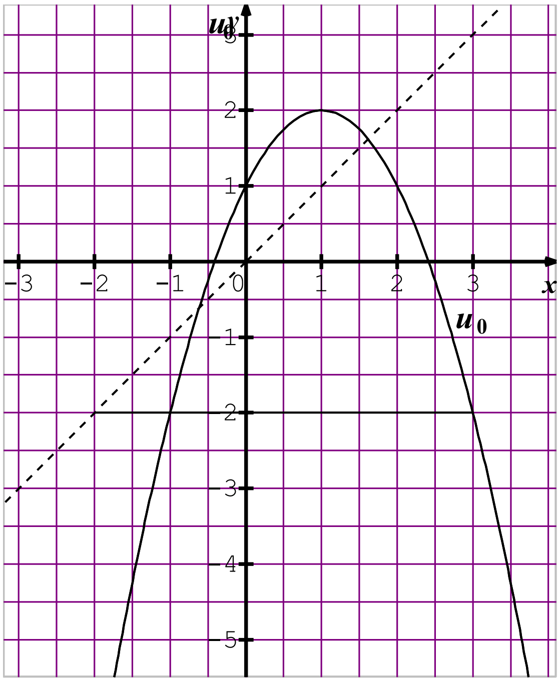
Exemple 2 : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 1$ et $u_0 = 6$



Exemple 3 : $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n + 1$ et $u_0 = \dfrac{1}{2}$



Exemple 4 : $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n + 1$ et $u_0 = 3$



II- Des suites particulières

Comme pour les fonctions, on peut définir des suites ou des familles de suites de référence

Dans le programme du lycée, il existe deux familles de suites liées à des opérations usuelles, l'addition et la multiplication.

Lorsqu'on crée une suite "étape" par "étape", c'est-à-dire: le passage d'un terme de la suite à son successeur, les opérations les plus simples consistent à "ajouter le même nombre réel" et "multiplier par le même nombre réel".

Chacune de ces opérations amène à caractériser une famille de suites.

Remarques: "retrancher le réel a" signifie "ajouter son opposé $-a$"

"diviser par le réel a" signifie "multiplier par son inverse $\frac{1}{a}$ "

II-1- Suites arithmétiques

II-1-1-Exemples

II-1-1-1-Compter de un en un à partir de

Compter de 1 en 1 à partir de 5. On crée ainsi une suite (u_n).

Écrire les premiers termes de la suite.

On note $u_0 = 5$

On note u_n le terme général.

Écrire u_{n+1} en fonction de u_n.

Écrire u_n en fonction de n.

II-1-1-2- La suite des nombres pairs

Écrire la suite des entiers naturels pairs

On note (v_n) cette suite.

Écrire v_{n+1} en fonction de v_n.

Écrire v_n en fonction de n.

II-1-1-3- La suite des nombres impairs

Écrire la suite des entiers naturels impairs

On note (w_n) cette suite.

Écrire w_{n+1} en fonction de w_n.

Écrire w_n en fonction de n.

II-1-1-4- Compter de –5 en –5

Compter de –5 en –5 à partir de 32. On crée ainsi une suite (x_n).

Écrire les premiers termes de la suite.

On note $x_0 = 32$

Écrire x_{n+1} en fonction de x_n.

Écrire x_n en fonction de n.

II-1-1-5- Intérêts simples

Une personne place un capital de 20 000 € à intérêts simples (les intérêts ne sont pas capitalisés) au taux annuel de 6%.

De quelle somme (capital + intérêts) dispose-t-elle au bout d'un an, de deux ans, de trois ans, de n années?

II-1-2- Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Dire que la suite (u_n) est une **suite arithmétique** signifie qu'il existe un réel r tel que,

pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre réel r est appelé **raison** de la suite arithmétique.

Autrement dit: on passe d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre **indépendant** de l'entier n.

Reprendre le §II-1-1- en précisant à chaque fois la raison.

Conséquence:

- Pour démontrer qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique, on pose **pour tout** entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$, et, on montre que cette différence est une **constante (indépendante de *n*)**.

- Pour démontrer qu'une suite (u_n) est n'est pas une suite arithmétique, il suffit d'un contre-exemple :

en calculant deux différences de termes consécutives et en montrant que ces différences ne sont pas égales.

Exemple :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = n^3 - 3n^2 + 3n$ $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, ….

On a $u_2 - u_1 = u_1 - u_0 = 1$
mais, en calculant $u_3 - u_2 = 9 - 2 = 7$, on montre que la suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

$v_n = 2 + 5n$
pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = (2 + 5(n + 1) - (2 + 5n) = \dots = 5$
(v_n) est une suite arithmétique de raison 5

II-1-3- Formules et théorèmes

Théorèmes:

1) Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors $u_n = u_0 + n\times r$.

2) Réciproquement

Si (u_n) est une suite qui s'écrit sous la forme $u_n = a + b\times n$ alors cette suite est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

3) Une suite (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si $u_n = f(n)$ où f est une fonction affine

4) Si u_k et u_p sont deux termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r, on a: $u_p = u_k + (p - k)r$.

Preuves:

1) On a le premier terme u_0, $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2\times r$,

si on a, à une étape, $u_n = u_0 + n\times r$ alors le terme suivant est:

par définition : $u_{n+1} = u_n + r$

Comme : $u_n = u_0 + n\times r$, on obtient $u_{n+1} = u_0 + n\times r + r = u_n + (n + 1)r$, ...

2) On sait: $u_n = a + b\times n$

On a donc: $u_{n+1} = a + b\times(n + 1)$, d'où, $u_{n+1} - u_n = a + b\times(n + 1) - (a + b\times n) = ... = b$.

Ce qui prouve que (u_n) est une suite arithmétique de raison b.

Lorsque $n = 0$, il vient $u_0 = a$.

3) La fonction f: $x \mapsto a + bx$ est une fonction affine.

4) Voir le §I-1-3 piquets et intervalles.

De k à p, on a ajouté $(p - k)$ fois la raison (nombre d'étapes)

II-1-4- Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Formule

La **somme des termes consécutifs** d'une suite arithmétique est égale à

$S = \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}$ **(Retenir la formule sous cette forme)**

Une preuve:

Posons a le premier terme, le terme suivant est $a + r$, puis, $a + 2r$, ...

Posons b le dernier terme, le terme précédent est $b - r$, puis, $b - 2r$, ...

On cherche la somme $S = a + ... + b$ où les termes sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r.

On a donc: $S = a + (a + r) + (a + 2r) + ... + (a + nr)$ **Remarque : Le nombre de termes est alors $n + 1$**

On peut aussi écrire: $S = b + ... + a$ en commutant les termes

On a alors: $S = b + (b - r) + (b - 2r) + ... + (b - nr)$

En faisant la somme termes à termes des deux lignes, on obtient:

$2S = (a + b) + (a + b) + ... + (a + b)$

Ce qui prouve la formule. $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)\times(n+1)}{2}$

Exemples:

* La somme des 50 premiers entiers naturels est égale à $\frac{1+50}{2} \times 50 = 1\,275$

** La somme des 50 premiers entiers pairs est égale à:

le premier entier pair est 0, le 50ième entier pair est: 98 (de 0 à 49 inclus, on a 50 termes)

la somme vaut: $\frac{0+98}{2} \times 50 = 2\,450$

*** Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 25 - 3n$.

Calculer la somme S = $u_{10} + u_{11} + ... + u_{36}$

D'après le théorème précédent un est une suite arithmétique de raison –3.

On a donc: S = $\frac{u_{10}+u_{36}}{2} \times (36 - 10 + 1) = \frac{25-30+25-3\times 36}{2} \times 27 = -1\,188$

II-2- Suites géométriques

II-2-1- Exemples

II-2-1-1- Doubler tous les jours....

Un nénuphar double de surface chaque jour.

Le trentième jour du mois, il couvre la moitié du lac.

Quel jour couvrira-t-il le lac?

Si le premier jour, le nénuphar faisait 1 m², quelle est la surface du lac?

II-2-1-2- Prendre la moitié du reste ...

Lors de la désintégration nucléaire, un corps radioactif perd la moitié de son activité radioactive lors d'une période T appelée demi-vie de l'atome.

La demie-vie du plutonium 239 est de 25 000 ans.

On suppose qu'on possède 100 grammes de plutonium239.

Dans combien de temps possédera t-on moins de 10 grammes de plutonium 239?

II-2-1-3- Intérêts composés

Une personne place un capital de 20 000 € à intérêts composés (les intérêts sont capitalisés) au taux annuel de 6%.

De quelle somme (capital + intérêts) dispose-t-elle au bout d'un an, de deux ans, de trois ans, de *n* années?

II-2-1-4 Puissances

Écrire sous forme de puissances:

$2^2 \times 2^3$; $\frac{2^{10}}{2^4}$; $(2^8)^3$; $3^5 \times 3$

Calculer 5^0 ; 100^0 ; ...

Factoriser le "plus grand" facteur commun: $7^9 - 7^3$; $7^{10} - 7^2$; $b^{n+1} - b^n$

Écrire les règles sur les puissances...

II-2-2- Définition

Soit (u_n) une suite définie sur ℕ.

Dire que la suite (u_n) est une **suite géométrique** signifie qu'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

q est appelé **raison** de la suite géométrique.

Autrement dit: on passe d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre indépendant de l'entier n.

Reprendre le §II-2-1- en précisant à chaque fois la raison.

Conséquence: Pour démontrer qu'une suite (u_n) est une suite géométrique, on pose pour **tout** entier n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et, on montre que ce quotient est une **constante (indépendante de *n*)**

II-2-3- Formules et théorèmes

Théorèmes

1) Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors $u_n = u_0 \times q^n$

2) Réciproquement

Si (u_n) est une suite qui s'écrit sous la forme $u_n = a \times b^n$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) alors cette suite est une suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

3) Si u_k et u_p sont deux termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q, on a: $u_p = u_k \times q^{p-k}$

Preuves

1) On a le premier terme u_0, $u_1 = u_0 \times q$, $u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q^2$

si on a, à une étape, $u_n = u_0 \times q^n$ alors le terme suivant est: $u_{n+1} = u_n \times q = u_0 \times q^n \times q = u_n \times q^{n+1}$, ...

2) On sait: $u_n = a \times b^n$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$)

On a donc: $u_{n+1} = a \times b^{n+1}$, d'où, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a \times b^{n+1}}{a \times b^n} = ... = b$ ce qui prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison b.

Lorsque $n = 0$, il vient $u_0 = a$.

3) Voir le §I-1-3 piquets et intervalles.

De k à p, on a multiplié par $(p - k)$ fois la raison (nombre d'étapes)

II-2-4- Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Formule

La somme des termes **consécutifs** d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) est égale à

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

(Retenir la formule sous cette forme)

Preuve

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

On cherche la somme $S = a + aq + aq^2 + ... + aq^n$. **Remarque : Le nombre de termes est alors *n* + 1**

En factorisant a, on a: $S = a(1 + q + q^2 + ... + q^n)$.

Il reste à évaluer: $S_1 = 1 + q + q^2 + ... + q^n$

En multipliant chaque terme par la raison q, il vient:

$$q S_1 = q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}$$

En soustrayant terme à terme les deux lignes précédentes:

$$S_1 - q S_1 = 1 - q^{n+1}$$

En factorisant S_1, on obtient: $(1 - q)\ S_1 = 1 - q^{n.+1}$

Lorsque $q \neq 1$, on peut diviser par $1 - q$, ce qui prouve le résultat. $\sum_0^n q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q \neq 1$.

Exemples:

1) Calculer la somme

S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256+ 512 + 1024 + 2048 + 4096

On reconnaît les puissances de 2.

$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{12}$

S est donc la somme de 13 termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2, on a donc:

$S = \frac{1-2^{13}}{1-2} = 2^{13} - 1$

2) On propose à un salarié les contrats suivants:

Contrat 1: la première année le salaire annuel est de 24 000 €

Chaque année son salaire est revalorisé d'un fixe valant 380 €

Contrat 2: la première année le salaire annuel est de 24 000 €

Chaque année son salaire est revalorisé de 1,5 %.

a) Comparer les salaires annuels au bout de 5 ans, au bout de 10 ans, au bout de 20 ans... de n ans

b) Comparer la somme totale des salaires au bout de 5 ans, au bout de 10 ans, au bout de 20 ans... de n ans.

Présenter les résultats sous forme de tableaux, sous forme de graphiques.

III- Comportement des suites

III-1- Variations d'une suite

III-1-1- Rappel et remarque concernant la variation de fonctions

Comme pour les fonctions numériques définies sur ℝ, on cherche à comparer les images connaissant l'ordre des antécédents.

Fonction croissante

On dit que f est une fonction strictement croissante sur I lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour tout a et tout b de I, $a < b$ implique $f(a) < f(b)$ (ou encore : $a \neq b$ dans I, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$)

Fonction décroissante

On dit que f est une fonction strictement décroissante sur I lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour tout a et tout b de I, $a < b$ implique $f(a) > f(b)$. (ou encore : $a \neq b$ dans I, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$)

L'idée est la même pour les suites, mais, comme la structure des entiers naturels permet de passer de 1 en 1 d'un **entier à son successeur**, il suffit de comparer, pour **tout** entier n, u_n et u_{n+1}

III-1-2- Définition d'une suite croissante

On dit que (u_n) est une suite croissante lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour **tout** $n \in \mathbb{N}$, on a: $u_n \leqslant u_{n+1}$

Ainsi, on a: $u_0 \leqslant u_1$, puis, $u_1 \leqslant u_2$, puis, $u_2 \leqslant u_3$, ...

soit: $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots$

III-1-3- Définition d'une suite décroissante

On dit que (u_n) est une suite décroissante lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour **tout** $n \in \mathbb{N}$, on a: $u_n \geqslant u_{n+1}$

Ainsi, on a: $u_0 \geqslant u_1$, puis, $u_1 \geqslant u_2$, puis, $u_2 \geqslant u_3$, ...

soit: $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots$

III-1-4- Comment étudier la variation d'une suite.

Obligatoire : Avant de vous lancer dans n'importe quelle étude, analysez le mode de génération de la suite.

Cas où $u_n = f(n)$ et la variation de f est connue sur $[0 ; +\infty[$.

Propriété :

La suite u et f ont les mêmes variations puisque $\mathbb{N} \subset [0 ; +\infty[$.

Attention : *petit rappel de logique ….* **La réciproque est fausse.**

Chacun peut imaginer graphiquement un contre-exemple :

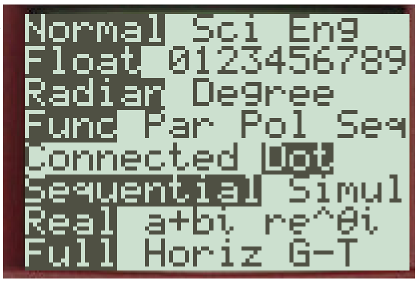
Sur l'axe des abscisses, placer les entiers 0, 1, 2, …

et placer les images dans l'ordre croissant par exemple …. On obtient ainsi une suite u croissante.

Pourquoi la fonction f n'est-elle pas nécessairement croissante. ?

Exemple à la calculatrice : *pour préparer l'avenir …*

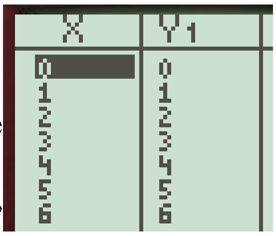
mettre la calculatrice en mode radian et entrer Y1 = X×cos (2πX).

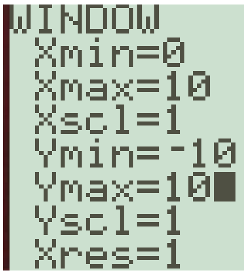


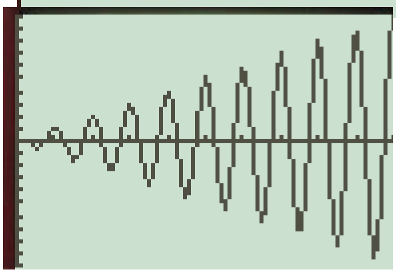
Configurer la table de la calculatrice de 1 en 1 et afficher la table ….

Configurer la fenêtre de la calculatrice en abscisse sur [0;10]

en ordonnée sur [–10 ; 10].







On peut démontrer (plus tard) que la suite (u_n) définie par $u_n = n \times \cos(2\pi n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, et, que la fonction f définie par $f(x) = x \times \cos(2\pi x)$ change de variation " régulièrement " .

Cas où $u_{n+1} = f(u_n)$

Tout peut arriver .... voir les exemples du § I-2-2- Suites définies par récurrence

Méthode générale

Lorsque l'ordre de u_n et u_{n+1} n'est pas immédiat,

*** il suffit d'étudier, pour **tout** $n \in \mathbb{N}$, le **signe** de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors $u_n \leqslant u_{n+1}$ et par conséquent la suite (u_n) est croissante.

Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors $u_n \geqslant u_{n+1}$ et par conséquent la suite (u_n) est décroissante.

*** Si **tous** les termes u_n sont strictement **positifs**, il suffit de comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors $u_n \leqslant u_{n+1}$ et par conséquent la suite (u_n) est croissante.

Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors $u_n \geqslant u_{n+1}$ et par conséquent la suite (u_n) est décroissante.

Exemples

1) On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - 5$.

On pose la différence $u_{n+1} - u_n$.

Or, $u_{n+1} = 2^{n+1} - 5 = 2 \times 2^n - 5$.

$u_{n+1} - u_n = 2 \times 2^n - 5 - (2^n - 5) = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n (2 - 1) = 2^n$ qui est un nombre strictement positif.

Conclusion: (u_n) est une suite croissante

2) On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 25$

On pose la différence $u_{n+1} - u_n$

Or, $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} + 25 = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 25$

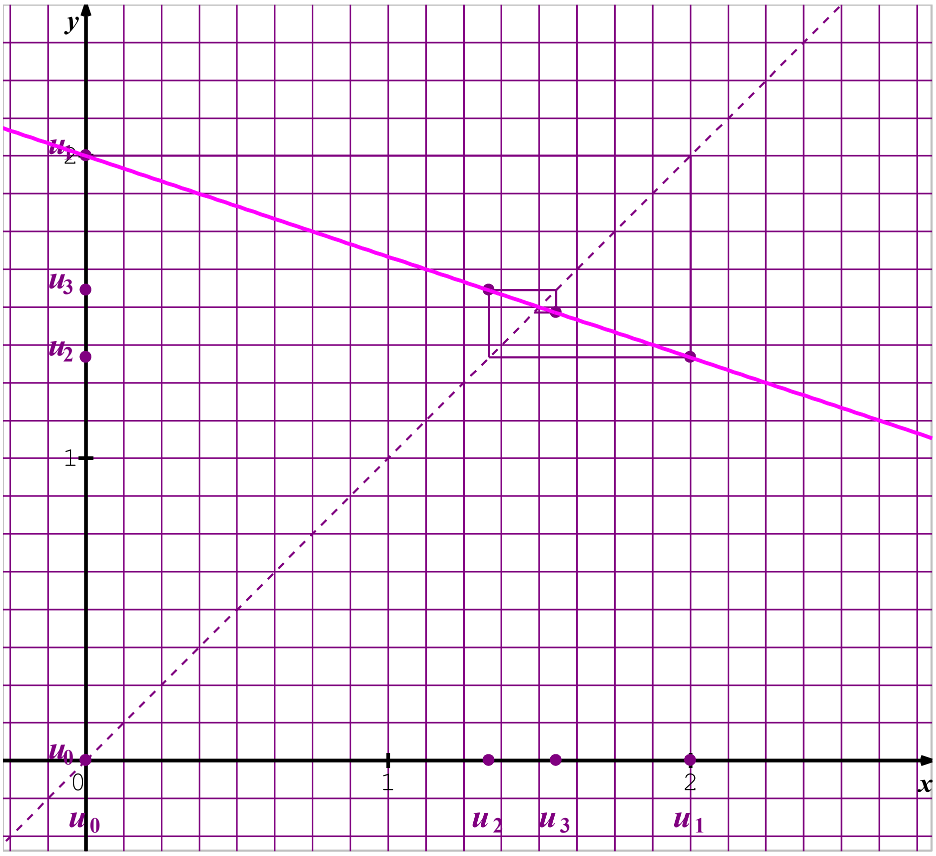
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 25 - \left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 25\right) = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left(\dfrac{1}{3} - 1\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)$ qui est un nombre strictement négatif.

Conclusion: (u_n) est une suite décroissante.

3) Une suite (u_n) peut-être ni croissante, ni décroissante.

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{3} u_n + 2 \end{cases}$

$u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{4}{3}$, $u_3 = \dfrac{14}{9}$ .... On a : $u_0 < u_1$, puis, $u_1 > u_2$, puis, $u_2 < u_3$, etc ...



III-2- Variations d'une suite arithmétique

Une suite arithmétique de raison r est croissante lorsque $r > 0$, et, décroissante lorsque $r < 0$.

La preuve est immédiate ...

III-3- Variations d'une suite géométrique

Une suite géométrique de termes strictement positifs et de raison q est croissante lorsque $q > 1$, et, décroissante lorsque $0 < q < 1$.

Preuve :

On a : $u_n = a \times q^n$ avec $a > 0$ et $q > 0$

Le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$, d'où, le résultat énoncé.

III-4- La notion de limite

Étudier la limite d'une suite (u_n), c'est étudier son comportement lorsque l'entier n devient indéfiniment grand (n tend vers $+\infty$).

III-4-1- La suite tend vers $+\infty$

La suite (u_n) n'est pas bornée.

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ signifie :

Quelque soit le réel M aussi grand que l'on veut, on peut trouver un entier n_0 tel que tous les termes u_n à partir du terme u_{n_0} sont supérieurs à M.

Autrement dit : Pour tout M réel, il existe un entier n_0 tel que : $n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant M$.

Exemple : $u_n = n^2 + 2n$

III-4-2- La suite tend vers *l*

La suite (u_n) tend vers le réel l lorsque n tend vers $+\infty$ signifie :

on peut trouver un entier n_0 tel que tous les termes u_n à partir du terme u_{n_0} sont aussi proches que l'on veut du réel l.

Exemples : $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$ tend vers 2.

$v_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ tend vers 0

Vocabulaire : Dans le cas où la suite tend vers un réel l, on dit que la suite converge vers l.

III-4-3- La suite n'a pas de limite.

Il existe des suites qui n'ont pas de limite.

Par exemple : La suite définie par $u_n = \cos n$

Les valeurs de u_n sont comprises entre -1 et 1 mais ne s'accumulent jamais autour d'une valeur ...

Vocabulaire :

Une suite (u_n) est dite **convergente** lorsque la suite a une limite réelle.

Dans le cas contraire, la suite est dite divergente .

La négation amène deux cas :

- la suite (u_n) n'a pas de limite
- la suite (u_n) admet une limite infinie ($\pm\infty$)

Cas des suites géométriques :

(u_n) est une suite géométrique de raison q. ($u_n = u_0 \times q^n$)
Si $-1 < q < 1$ alors la suite géométrique (u_n) converge vers 0.
Si $q > 1$ la suite géométrique (u_n) diverge vers $\pm\infty$ selon le signe du premier terme.
Si $q < -1$ alors la suite géométrique (u_n) n'a pas de limite.

Cas des suites arithmétiques :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r. ($u_n = u_0 + r \times n$)
Si $r > 0$ alors la suite arithmétique (u_n) diverge vers $+\infty$.
Si $r < 0$ la suite arithmétique (u_n) diverge vers $-\infty$.