On veut étudier $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Très peu de choses à connaître par cœur … (mais à connaître obligatoirement).

Préalable : savoir calculer sans calculatrice … lorsque les nombres sont " raisonnables ".
savoir mener tout calcul algébrique (calcul littéral).
savoir ce que signifie " … équivaut à … "
savoir lire une représentation graphique

I- Ce qu'il faut savoir par cœur : (les " formules ")

Résultat vu en seconde :

Si $a > 0$ alors f admet un minimum en $\alpha = \frac{-b}{2a}$.

Si $a < 0$ alors f admet un maximum en $\alpha = \frac{-b}{2a}$.

Résultat appris en 1ère :

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Les racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Mais connaître ces formules sans savoir ce qu'elles permettent de calculer, de démontrer ne permet pas de résoudre les problèmes.

2- Ce qu'il faut comprendre

Résultat vu en seconde :

Une fonction du second degré est représentée par une parabole d'où, si on connaît la forme de la parabole on pourra **imaginer** les résultats qui vont suivre …..

en particulier, les variations de la fonction.

L'extremum se calcule en faisant f(α) (PAS DE FORMULE)

Résultat vu en première :

Si $\Delta < 0$ *(on ne peut pas faire $\sqrt{\Delta}$)*

Les quatre phrases suivantes sont équivalentes :

(1) l'expression n'a pas de racines

(2) l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions

(3) Il n'y a pas de factorisation en facteurs du premier degré.

(4) la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Si $\Delta = 0$ *($\sqrt{\Delta} = 0$)*

Les quatre phrases suivantes sont équivalentes :

(1) l'expression a une racine double . $x_1 = x_2 = \alpha$

(2) l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution α.

(3) l'expression se factorise en $f(x) = a(x - \alpha)^2$

(4) la parabole a son sommet sur l'axe des abscisses.

(*Remarque* : *l'extremum vaut 0*)

Si $\Delta > 0$ (*on peut calculer* $\sqrt{\Delta}$)

Les quatre phrases suivantes sont équivalentes :

(1) l'expression a deux racines distinctes x_1 et x_2 .

(2) l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.

(3) l'expression se factorise en $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

(4) la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 .

Comprendre :

Forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + f(\alpha)$.

est équivalent à

le sommet de la parabole représentant f est : $\Omega(\alpha\ ; f(\alpha))$.

L'axe de symétrie de la parabole permet de comprendre que $\dfrac{x_1+x_2}{2} = \alpha$.

Comprendre :

L'allure de la parabole permet de dresser le tableau de signes de l'expression

Exemples :

1) $f(x) = x^2 + 4$

Comme $f(x) > 0$ (somme de deux nombres dont l'un est strictement positif), $f(x)$ n'est pas factorisable ….

(Inutile de calculer Δ)

Comme le coefficient 1 de x^2 est strictement positif, le minimum est 4 atteint en 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

2) $f(x) = -2x^2 + 5x + 7$

$-2 < 0$ f admet un maximum en $\dfrac{5}{4}$ qui vaut $-2\times\left(\dfrac{5}{4}\right)^2+5\times\left(\dfrac{5}{4}\right)+7 = \dfrac{-25+50+56}{8} = \dfrac{81}{8}$.

La forme canonique est : $f(x) = -2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{81}{8}$

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{81}{8}$	$\searrow$

(On peut donc être certain que $f(x)$ est factorisable, a des racines, ….)

$\Delta = 5^2 - 4\times(-2)\times 7 = 25 + 56 = 81 = 9^2$

Conséquences :

On peut factoriser en produit de facteurs du premier degré

La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les réels $\frac{-5-9}{2\times(-2)} = \frac{7}{2}$ et $\frac{-5+9}{2\times(-2)} = -1$

La forme factorisée est : $f(x) = -2\left(x-\frac{7}{2}\right)(x+1)$

$f(x) > 0$ sur $\left]-1;\frac{7}{2}\right[$ (*Il suffit d'imaginer la parabole*)

$f(x) < 0$ sur $]-\infty;-1[\cup\left]\frac{7}{2};+\infty\right[$

3) $f(x) = x^2 + bx - 4$

Montrer que quelque soit b, l'expression $f(x)$ est factorisable en produit de facteurs du premier degré.

Comme $\Delta = b^2 - 4\times 1\times(-4) = b^2 + 16$ est strictement positif, $f(x)$ admet deux racines distinctes et par conséquent est factorisable en produit de facteurs du premier degré.

4) $f(x) = 5x^2 + 3x + c$

Pour quelle valeur de c, l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une et une seule solution ?

Comme $\Delta = 3^2 - 4\times 5\times c = 0$ si et seulement si $c = \frac{9}{20}$, l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution si et seulement si $c = \frac{9}{20}$.

5) $f(x) = -x^2 + 5x - 7$

Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.

Comme $\Delta = 25 - 28 = -3$ est strictement négatif, l'expression ne possède pas de racines et est toujours du signe de -1 coefficient de x^2.

L'ensemble des solutions de $f(x) < 0$ est $\mathbb{R}$. (Celui de $f(x) > 0$ est $\emptyset$).

6) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.

Comme $\Delta = 25 - 24 = 1$ est strictement positif, l'expression possède deux racines : $\frac{-5-1}{-2} = 3$ et $\frac{-5+1}{-2} = 2$ et est du signe de -1 coefficient de x^2 à l'extérieur des racines.

L'ensemble des solutions de $f(x) < 0$ est $]-\infty ; 2[\cup]3 ; +\infty[$. (Celui de $f(x) > 0$ est $]2 ; 3[$).

3- Mais d'où sortent-elles ces formules ?

Pas d'un chapeau … ni par un coup de baguette magique …

On pourrait en créer d'autres équivalentes …. mais dans tous les cas, il est nécessaire de savoir ce qu'elles représentent.

Δ : le discriminant ?

Δ : Juste un nom donné à un nombre pour faciliter l'écriture des calculs.

Pourquoi ? parce que c'est plus simple d'écrire $\sqrt{\Delta}$ que $\sqrt{b^2-4ac}$

discriminant : parce qu'il sert à discriminer, c'est-à-dire, à distinguer les cas où …. (voir ci-dessus)

Le calcul : quand on veut résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, le traitement algébrique mène à

mais au fait, comment résoudre cela ? mais, bien sûr, si je savais factoriser, je sais quand un produit de facteurs est nul … alors, factorisons …

tiens, ça ressemble au développement d'une somme au carré, mais, il manque des morceaux ….

mettons ces morceaux, mais, gardons une égalité.

et, ça donne : $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \text{truc} = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad (\text{Truc} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2})$$

je peux donc remplacer $x^2 + \frac{b}{a}x$ par $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

Maintenant : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$

c'est mieux quand c'est " arrangé " (je n'ai pas oublié comment on calculait avec des fractions), alors: $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

C'est pas facile à lire, si je remplace le nombre $b^2 - 4ac$ par Δ, c'est, plus court et ça veut dire la même chose.

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Ah ! mais je me rappelle, c'est une différence de deux carrés … zut ! pas toujours …

je crois me souvenir qu'un carré est positif ! alors, si Δ n'est pas positif, je ne peux pas factoriser ….

Récapitulons :

$\Delta < 0$, je ne peux pas factoriser …. je ne peux pas mettre sous forme de produit …. ce sera toujours une expression de signe constant ….

$\Delta = 0$ c'est l'idéal …. $ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ lorsque $x = \frac{-b}{2a}$ (je le reconnais celui-là …)

$\Delta > 0$ Je peux écrire : $\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et donc : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$

lorsque : $x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou lorsque $x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

Ce sont les racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$