Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

Objectif : Entretenir les connaissances sur les vecteurs
Mettre en évidence les données, les outils permettant de prouver et faire une rédaction avec les liens logiques appropriés.

Méthode :

- Lire l'énoncé
- Distinguer les données (on est certain que ....)

  des conclusions (on doit montrer que .....)
- Indiquer les définitions, propriétés, ... (" outils ") liées à une donnée et permettant de progresser vers la conclusion.
- Rédiger la démonstration.

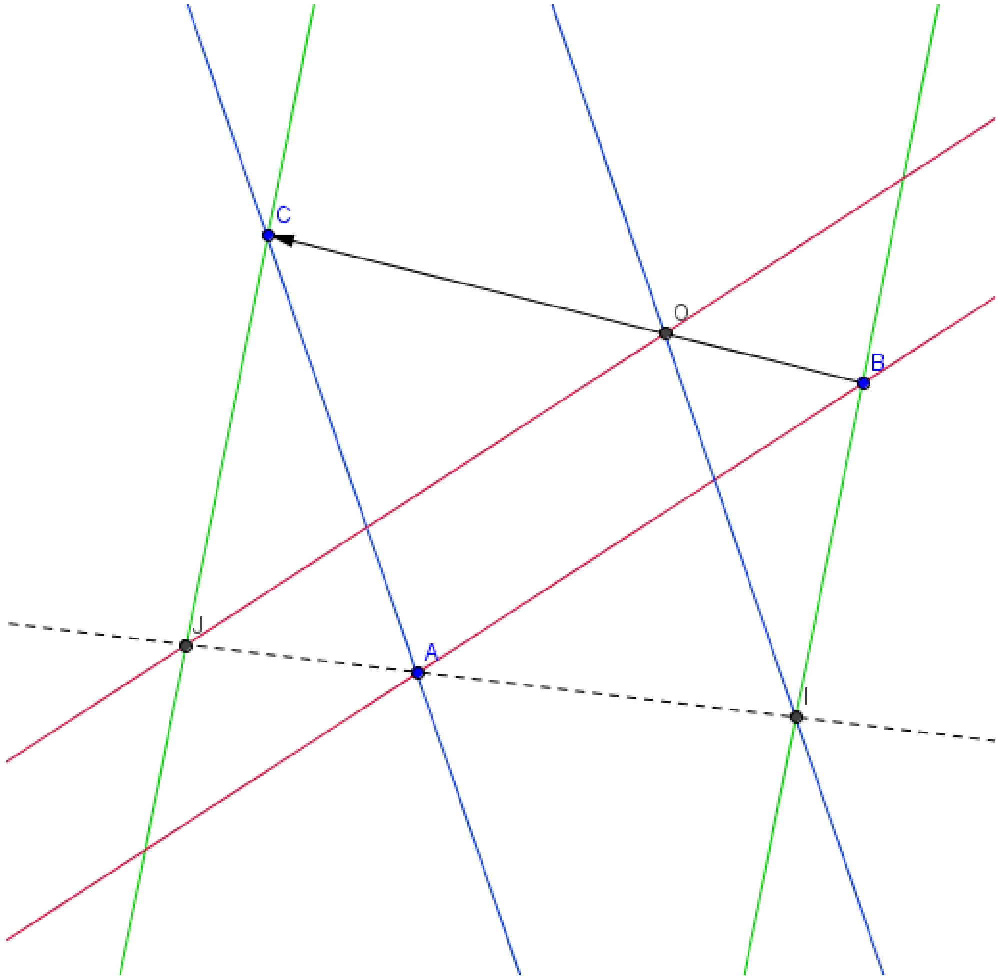
Énoncé :

ABC étant un triangle, construire le point *O* défini par $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{BC}$.

d_1 et d_2 sont deux droites parallèles passant respectivement par *B* et *C* et non parallèles aux côtés du triangle.

La parallèle à (*AB*) passant par *O* coupe la droite d_2 en *J*, et, la parallèle à (*AC*) passant par *O* coupe la droite d_1 en *I*.

En se plaçant dans un repère, démontrer que les points *A*, *I*, *J* sont alignés.



	Données		**Conclusion**
1	ABC triangle		
2	O défini par $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.		
3	d_1 et d_2 sont deux droites parallèles ...		
4	$I \in d_1$ et $J \in d_2$		
5	$(OJ) \parallel (AB)$ et $(OI) \parallel (AC)$		A, I, J alignés

Choix d'un repère : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (***Justifier par la donnée (1) et l'analyse à suivre où le rôle des axes et du sommet du repère apparaît ….***)

commentaires : d'autres choix possibles, les coordonnées seront différentes, la démarche est identique.

(AB) est l'axe des abscisses et (AC) est celui des ordonnées.

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a : $A(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$ et $C(0 ; 1)$.

D'après ***donnée (2)*** **:**

On en déduit : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, puis $\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, donc $\begin{cases}x_O=-\frac{1}{3}+1\\y_O=\frac{1}{3}+0\end{cases}$, d'où : $O(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3})$

ou encore :

on cherche $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

d'où : $O(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3})$

donnée (3)

d_1 n'étant pas parallèle aux axes possède une équation cartésienne de la forme :

$ax+by+c=0$ avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$ (**ou encore** : une équation réduite : $y=mx+p$ avec $m\neq 0$)

d_2 étant parallèle à d_1, une équation cartésienne de d_2 est de la forme :

$ax+by+d=0$ (**ou encore** : une équation réduite : $y=mx+q$)

Commentaires : les droites sont parallèles, mais la direction est variable, d'où, l'introduction d'un paramètre : le coefficient directeur m ou un vecteur directeur $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. *(rappel :* $m=-\frac{a}{b}$ *).*

Les autres coefficients sont donc exprimés dans la suite en fonction de ces paramètres.

$B\in d_1$ d'où $a+c=0$, donc, $c=-a$ soit : $ax+by-a=0$ une équation de (d_1) (**ou** $0=m+p$, $p=-m$
$y=mx-m$)

$C\in d_2$ d'où $b+d=0$, donc, $d=-b$. soit : $ax+by-b=0$ une équation de (d_2) (ou $1=m\times 0+q$, $q=1$
$y=mx+1$)

Conclusion : en travaillant avec les équations réduites

On a traduit la donnée : " d_1 et d_2 sont deux droites parallèles passant respectivement par B et C et non parallèles aux côtés du triangle " par :

$d_1 : y=mx-m=m(x-1)$ et $d_2 : y=mx+1$ et $m\neq 0$.

Commentaires *: I et J sont à l'intersection de deux droites, d'où, l'analyse qui suit consistant à utiliser les informations sur les deux droites.*

donnée (5)

$(OJ)\parallel(AB)$ (axe des abscisses), donc l'ordonnée de J est égale à celle de O, soit $y_J=\frac{1}{3}$

$(OI)\parallel(AC)$ (axe des ordonnées), donc l'abscisse de I est égale à celle de O, soit $x_I=\frac{2}{3}$

donnée (4)

$I\in d_1$ donc $I(\frac{2}{3}\ ;\ m(\frac{2}{3}-1))$, soit $I(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{-1}{3}m)$.

ou

$\frac{2}{3}a + by_I - a = 0$, on en déduit : $y_I = \frac{1}{3} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{3b}$ $\quad I(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{a}{3b})$

$J \in d_2$ donc $J((\frac{1}{3} - 1) \times \frac{1}{m}\ ;\ \frac{1}{3})$, soit : $J(-\frac{2}{3m}\ ;\ \frac{1}{3})$

ou

$ax_J + \frac{1}{3}b - b = 0$, on en déduit : $x_J = \frac{2}{3} \times \frac{b}{a} = \frac{2b}{3a}$ $\quad J(\frac{2b}{3a}\ ;\ \frac{1}{3})$

Tous les éléments sont là pour conclure avec la relation de colinéarité :

le choix de A comme sommet du repère permet d'écrire facilement les coordonnées des vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{AJ}$

On a alors : $\vec{AI}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3}m \end{pmatrix}$ et $\vec{AJ}\begin{pmatrix} \frac{-2}{3m} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ *ou* $\vec{AI}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{a}{3b} \end{pmatrix}$ et $\vec{AJ}\begin{pmatrix} \frac{2b}{3a} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Comme $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ et $\frac{-1}{3}m \times \frac{-2}{3m} = \frac{2}{9}$ (*ou* $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ et $\frac{2b}{3a} \times \frac{a}{3b} = \frac{2}{9}$,)

les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{AJ}$ sont colinéaires.

Conclusion : les points A, I, J sont alignés