I- la piste de ski

Énoncé

La courbe ci-dessous représente le profil d'une piste de ski, partant d'une vallée O, en passant par un col C et arrivant dans la vallée A. En abscisse est indiquée la distance horizontale depuis le point de départ O, en ordonnée l'altitude par rapport à O. L'unité sur chaque axe est l'hectomètre.

Le point H désigne un hameau , le point R un refuge.

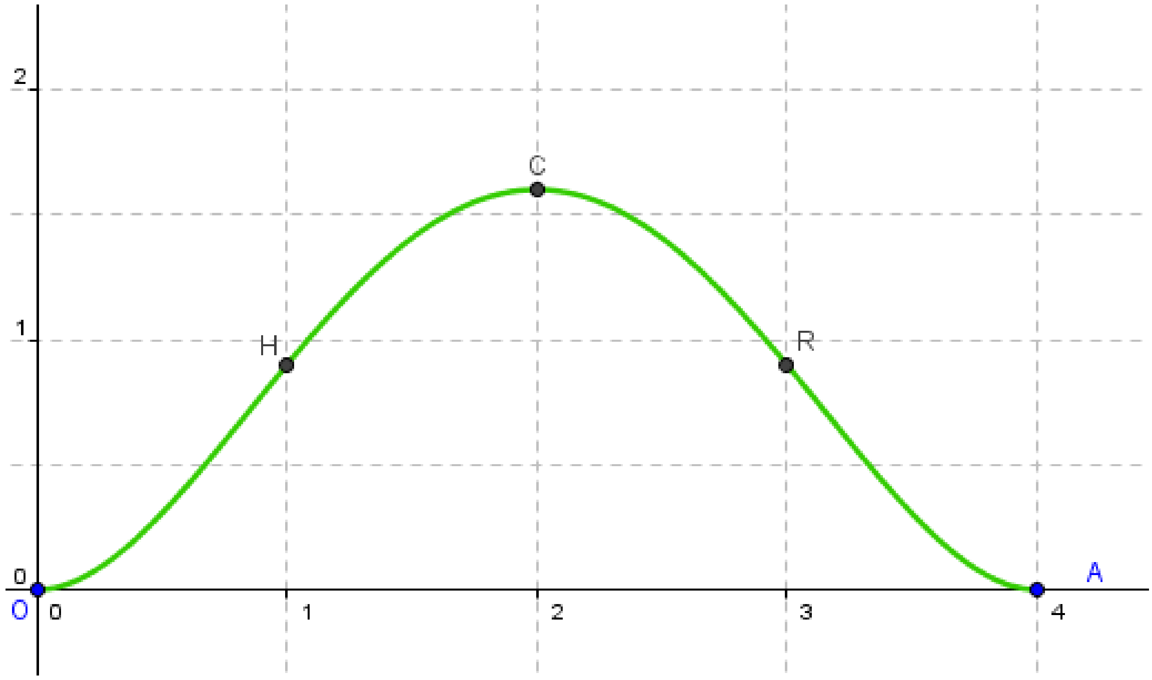
Le guide prétend qu'au hameau H, la pente de la piste est de 120%.

Quelle construction peut-on envisager pour vérifier cette valeur ?

Rappels utiles : **Vocabulaire** (*compléter les deux phrases*)

Le coefficient directeur d'une droite ….

On appelle " pente " de la droite dans un plan, le quotient … (*ceux qui passent le code doivent savoir*).



En réalité la courbe est celle de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{10}x^2(x-4)^2$ sur [0; 4]

(Autrement dit : une équation de la courbe est : $y = \frac{1}{10}x^2(x-4)^2$ *)*

Utilisation de GeoGebra :

Dans la ligne de saisie, entrer la fonction
Créer un curseur a variant de 0 à 4 avec un pas de 0,1
Créer un curseur h variant de –1 à 1 avec un pas de 0,01
Dans la ligne de saisie, entrez M=(a,f(a)) (laisser la valeur par défaut)
Dans la ligne de saisie, entrez N=(a+h,f(a+h)) (laisser la valeur par défaut)

Sur quelle courbe sont situés M et N? Pourquoi?

Faire apparaître la droite (MN)
Faire varier h sur le curseur. Que constatez-vous lorsque $h = 0$? Que constatez-vous lorsque $h \neq 0$ mais de plus en plus proche de 0?

Faire varier le curseur a pour choisir un autre point de la piste et recommencer l'analyse.

Entrer dans la ligne de saisie: Tangente[a, f]
Faire varier le curseur a.

Répondre aux questions suivantes:
Évaluer la pente de la piste au refuge R.

Quelle est la pente de la piste au col C ? au départ O ? à l'arrivée A ?

Les calculs:
Écrire la " formule " donnant le coefficient directeur de la droite (MN) : $c_{oef}\, d_{ir}$ = …......................
Les calculs vont être faits dans le cas où $a = 1$
Calculer $f(1)$.
Calculer $f(1 + h)$
Aide : c'est un calcul où il faut prendre son temps sans se préoccuper outre mesure de $\frac{1}{10}$ *sans oublier les relations du type* $(a + b)^2 = ...$
Calculer $f(1 + h) - f(1)$ et factoriser h
Là encore, prendre son temps en factorisant au début par $\frac{1}{10}$ ...
On appelle $\tau_1(h)$ le quotient: $\tau_1(h) = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ avec $h \neq 0$.
Commentaire : *La lettre grecque τ se lit 'tau " ce qui nous arrange bien puisqu'un taux d'accroissement d'une fonction est le quotient de l'accroissement des valeurs images Δy par l'accroissement des valeurs antécédentes Δx.*
Que représente $\tau_1(h)$ pour la droite (HN)?
Vers quel réel se rapproche $\tau_1(h)$ lorsque h se rapproche de 0 aussi près que l'on veut ? Que retrouve-t-on ?
(*Rappel du texte : " Le guide prétend qu'au hameau H, la pente de la piste est de 120%. "*)

II- sécante à une courbe, position limite

On considère la fonction f définie sur ℝ par $x \mapsto -x^2 + 3$.

On note P sa représentation graphique dans un repère.
1) Construire P et placer sur P les point A et B d'abscisses respectives 1 et 3.
Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).
2) h étant un réel non nul, placer le point M sur P d'abscisse $1 + h$.
Calculer le coefficient directeur m de la droite (AM) en fonction de h.
3) Que devient m quand h tend vers 0? (On dit que la limite de m quand h tend vers 0 est ....)
Tracer la droite correspondante, et, interpréter les résultats.

III- vitesse moyenne, vitesse instantanée

Un mobile se déplace sur une trajectoire. Un savant calcul à montrer que la distance parcourue sur cette trajectoire s'exprime par la fonction $d(t) = \frac{1}{2}t^2 + t$ où t est la durée du parcours exprimée en secondes et $d(t)$ la distance exprimée en mètres.

1 a) Calculer d(5) et d(3).

b) Quelle est la vitesse moyenne en ms^{-1} du mobile entre ces deux dates?

2) a) Soit h un réel positif. Calculer en fonction de h la vitesse moyenne $V_m(h)$ en ms^{-1} du mobile entre les dates 3 et $3 + h$.

b) Que devient V_m quand h tend vers 0?

Bilan :

*** Dans les trois activités, on a étudié un rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et observé le comportement de ce rapport quand b tend vers a.

*** En pratique, il est plus simple pour les calculs de poser $b = a + h$ (c'est toujours possible !!!), c'est-à-dire que $h = b - a$ et d'effectuer les opérations nécessaires pour réduire le rapport : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et d'étudier le comportement de ce rapport lorsque h tend vers 0.

*** Lorsque ce rapport tend vers un réel, le nombre obtenu s'appelle **nombre dérivé** de f en a.

Il est noté $f'(a)$.

On écrit : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

Graphiquement :

Par construction, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB) où $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$.

La position " limite " des sécantes (AB), lorsque b tend vers a, est la tangente T à C_f en A.

Son coefficient directeur est $f'(a)$.

Évidemment, la tangente passe par ce point A.

On a donc, pour tout point M$(x\,;y)$ de T, $\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$. (Ce qui donne une équation de T).

Pour préparer l'avenir *.... Δf est la notion différentielle (du mot différence de ... (soustraction)) qui donne l'accroissement de la fonction (Techniquement pour nous actuellement, on a cherché l'accroissement des images de la fonction)*

Δx est l'accroissement de la variable.

On a donc étudié un rapport de la forme : $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

Au passage à la limite, on note df et dx , et, on obtient $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}$

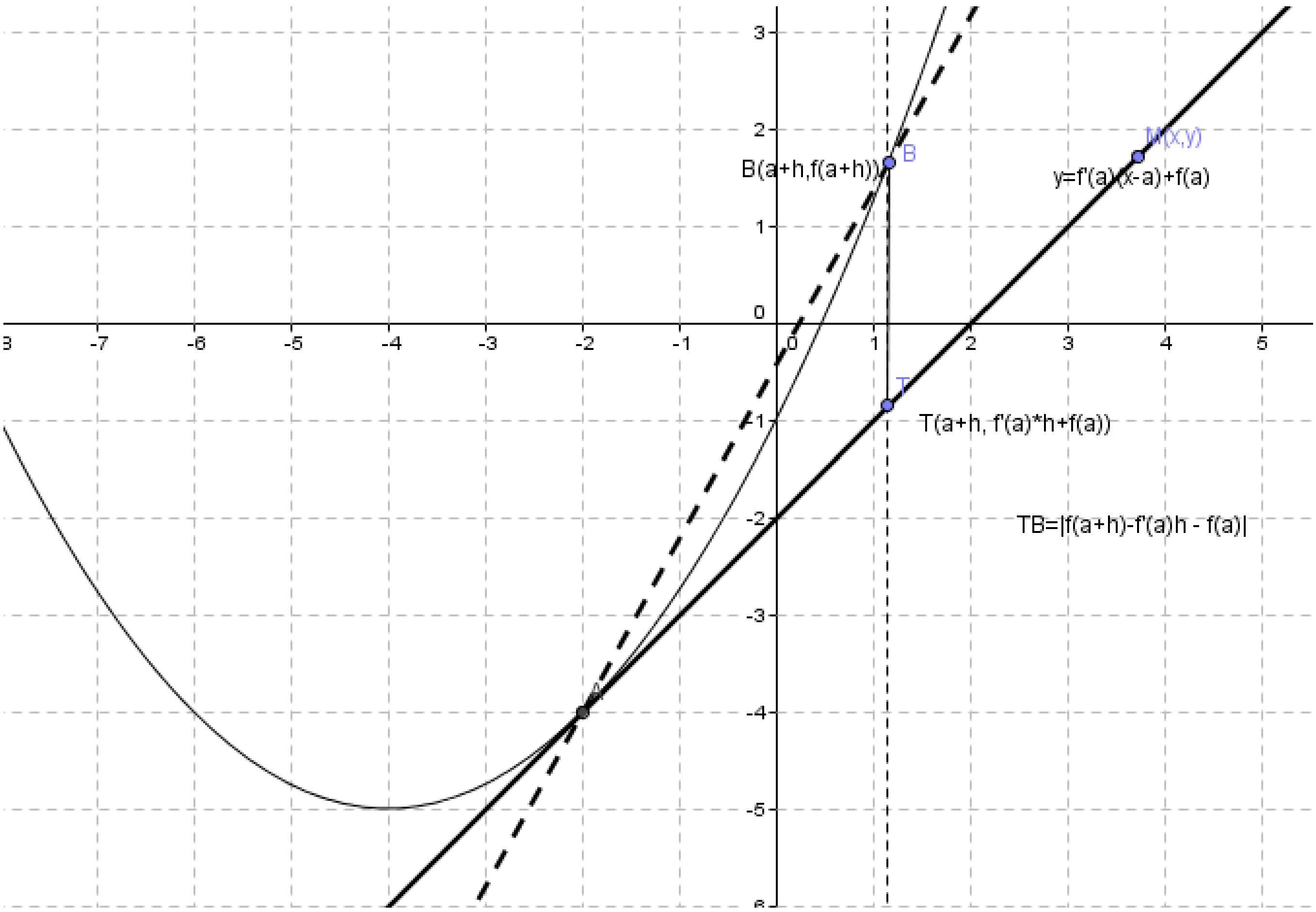
Dans le cours du lycée, on aura l'équivalence des écritures : $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}(a) = f'(a)$.

(Le symbole ' qui marque la dérivation est équivalent dans le cadre du lycée à l'opérateur $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$ *qui agit sur la fonction).*

La lecture graphique :

Quand h très proche de 0, $f(a + h) \approx f'(a)\,h + f(a)$

(ordonnée de B *presqu'égale* à ordonnée de T)


B(a+h,f(a+h))
B
M(x,y)
y=f'(a)(x-a)+f(a)
T
T(a+h, f'(a)*h+f(a))
TB=|f(a+h)-f'(a)h - f(a)|
A