EXERCICE 2 (5 points)

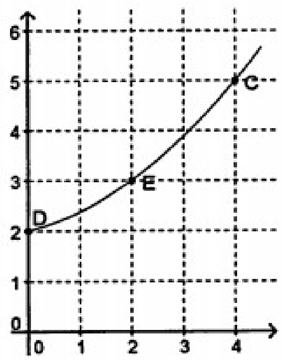
Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.
On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = a x^2 + b x + c$ où a, b et c sont trois nombres réels.

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. La valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.
Sur le dessin ci-dessous, on a représenté graphiquement la fonction f.

Partie A



On cherche à déterminer la valeur des coefficients a, b et c.

1) a) À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.

b) En déduire que le système précédent est équivalent à :

$$MX = R \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

et R une matrice colonne que l'on précisera.

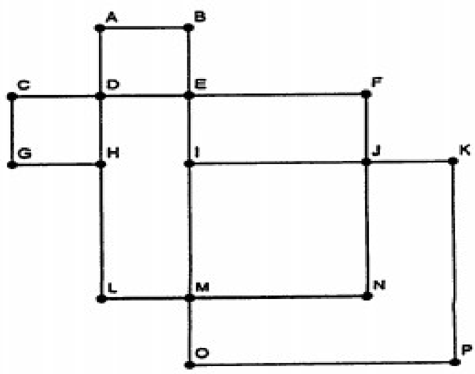
2) On admet que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & -0{,}25 & 0{,}125 \\ -0{,}75 & 1 & -0{,}25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des coefficients a, b et c, en détaillant les calculs.

3) Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2016.

Partie B

Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-dessous toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement. Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.



1) a) Déterminer si le graphe est connexe.

b) Déterminer si le graphe est complet.

Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue dans laquelle se trouvent des clients.

2) Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :

a) Le point d'arrivée est le même que le point de départ.

b) Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.

Correction :

Partie A

1) traduction des données :

x représente le nombre d'année depuis 2010 et $f(x)$ le nombre de centaines d'agences à cette date $2010 + x$.
Au 1er janvier 2010, 200 agences , soit : $f(0) = 2$.

Au 1er janvier 2012, 300 agences , soit : $f(2) = 3$.

Au 1er janvier 2014, 500 agences , soit : $f(4) = 5$.

Puisque $f(x) = ax^2 + bx + c$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a\times 0^2+b\times 0+c=2 \\ a\times 2^2+b\times 2+c=3 \\ a\times 4^2+b\times 4+c=5 \end{cases} \text{, soit : } \begin{cases} c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 16a+4b+c=5 \end{cases}$$

b) On pose M = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et R = $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Le produit M×X donne : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times a+0\times b+1\times c \\ 4\times a+2\times b+1\times c \\ 16\times a+4\times b+1\times c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 4a+2b+c \\ 16a+4b+c \end{pmatrix}$

L'équation M×X = R est donc équivalente au système $\begin{cases} c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 16a+4b+c=5 \end{cases}$.

2) ***On admet que M est inversible.***

En multipliant à gauche par M^{-1} les deux membres de l'équation matricielle, on obtient :

M^{-1} ×M×X = M^{-1} × R et comme M^{-1} ×M = I_3 (matrice identité d'ordre 3), on obtient :

X = M^{-1} × R

Comme M^{-1} × R = $\begin{pmatrix} 0{,}125 & -0{,}25 & 0{,}125 \\ -0{,}75 & 1 & -0{,}25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 0{,}125-3\times 0{,}25+5\times 0{,}125 \\ -2\times 0{,}75+1\times 3-5\times 0{,}25 \\ 1\times 2+0\times 3+0\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 \\ 0{,}25 \\ 2 \end{pmatrix}$

Conclusion : $a = 0{,}125$; $b = 0{,}25$; $c = 2$

$f(x) = 0{,}125x^2 + 0{,}25x + 2 = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 2$

(*Vérification : f (0) = 2, f(2) = 0,5 + 0,5 + 2 = 3 et f(4) = 2 + 1 + 2 = 5*)

3) En 2016, l'entreprise posséderait suivant ce modèle, $f(6) = 0{,}125\times 36 + 0{,}25 \times 6 + 2 = 8$ centaines d'agence, soit 800 agences.

Partie B-

1 a) le graphe est connexe car aucun sommet n'est isolé. On peut relier deux sommets quelconques par au moins une chaîne.
Par exemple : (*on peut donner un exemple de chaîne passant par tous les sommets*)
A-B-E-F-J-K-P-O-M-N-J-I-M-L-H-G-C-D.

b) le graphe n'est pas complet, car, il existe au moins deux sommets qui ne sont pas adjacents. Par exemple, A et E ne sont pas adjacents (il n'y a pas d'arête [AE]).

2) Un circuit empruntant toutes les arêtes une et une seule fois est une chaîne eulérienne.
Le graphe étant connexe, d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne si et seulement si 0 ou 2

exactement sommets sont de degré impair.
Lorsque tous les degrés sont pairs (aucun degré impair), on a un cycle eulérien.
Lorsque deux sommets sont de degré impair, les sommets sont les deux extrémités de la chaîne eulérienne.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Degré	2	2	2	4	4	2	2	3	3	4	2	2	4	2	2	2

a) D'après le théorème d'Euler, il n'existe pas de cycle eulérien.

b) mais, il existe une chaîne eulérienne.
On peut partir de H pour arriver à I.

Complément : la somme des degrés est : 42 donc le graphe possède 21 arêtes.
Une chaîne eulérienne aura 21 arêtes :
exemple : H-G-C-D-A-B-E-D-H-L-M-O-F-K-J-N-M-I-J-F-E-I