Des tableaux- Des graphes- des matrices

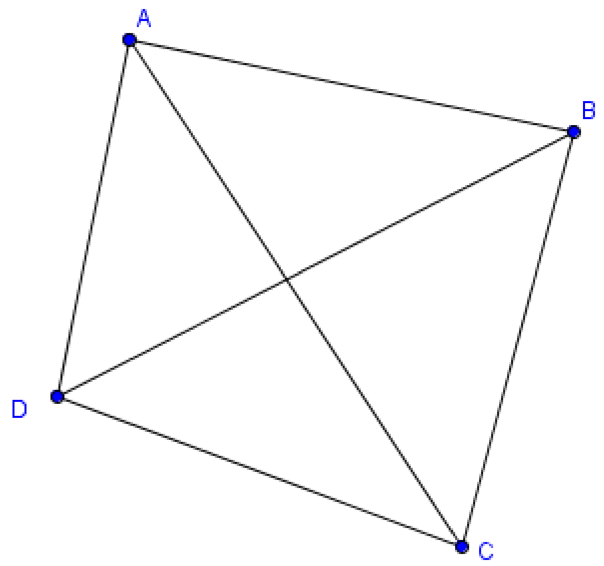
Vous devez organiser un tournoi sur un week-end et il faut prévoir cette organisation pour 4, 5, 6 ou 7 équipes.

I- Quatre équipes A, B, C et D sont engagées.

Voici un planning en trois temps où chaque équipe rencontre une et une seule fois l'autre équipe durant le tournoi.

1^er^ temps	**2^ème^ temps**	**3^ème^ temps**
A rencontre B C rencontre D	A rencontre C B rencontre D	A rencontre D B rencontre C

I-1- a) Faire un graphe où les sommets sont les équipes, où une arête signifie : " … et … se rencontrent. "



b) Combien le graphe a-t-il d'arêtes ? le graphe a 6 arêtes

Quel est le degré de chaque sommet ? le degré pour chaque sommet vaut 3 (chaque équipe rencontre les trois autres)

Quelle est la somme des degrés ? la somme des degrés est $4 \times 3 = 12$

Quel est le lien entre cette somme et le nombre de rencontres ?

La somme des degrés est le double des rencontres. Il y a 6 rencontres (nombre d'arêtes), chaque rencontre est comptabilisée deux fois en faisant la somme des degrés puisqu'une arête représentant une rencontre a deux sommets.

I-2- En mettant dans l'ordre alphabétique, écrire la matrice carrée (d'ordre 4) d'adjacence de ce graphe.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne (et chaque colonne) contient un seul " 0 " (sur la diagonale).

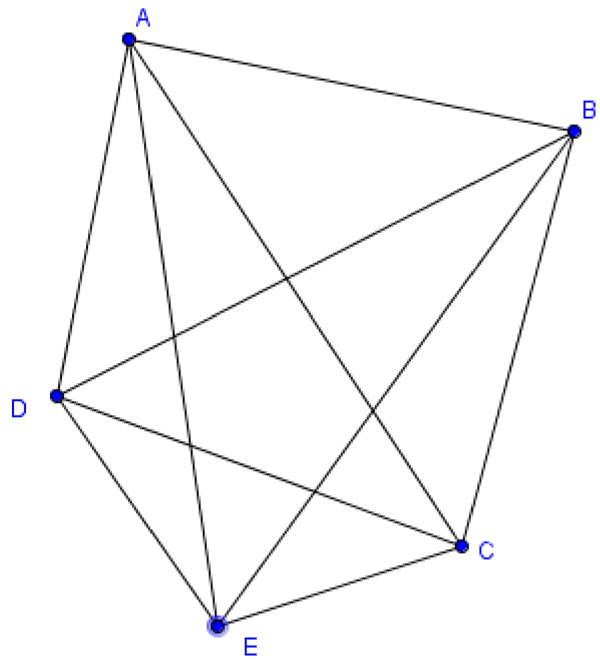
II- Cinq équipes A, B, C, D et E sont engagées.

II- 1- Recopier et compléter le planning en cinq temps où chaque équipe rencontre une et une seule fois l'autre équipe durant le tournoi et où à chaque temps une équipe soit exempte.

1^er^ temps	**2^ème^ temps**	**3^ème^ temps**	**4^ème^ temps**	**5^ème^ temps**
A rencontre B C rencontre D E exempte	A rencontre C B rencontre E D exempte	A rencontre E B rencontre D C exempte	A rencontre D C rencontre E B exempte	B rencontre E D rencontre E A exempte

Quel est le nombre de matches dans ce tournoi ? 10 matches (à chaque temps, il y a deux rencontres)

II- 2- a) Faire un graphe où les sommets sont les équipes, où une arête signifie : " … et … se rencontrent. "



b) Combien le graphe a-t-il d'arêtes ? 10 arêtes

Quel est le degré de chaque sommet ? 4 (chaque équipe rencontre les 4 autres)

Quelle est la somme des degrés ? $5\times4 = 20$

Quel est le lien entre cette somme et le nombre de rencontres ? $20 = 2\times10$

II-3- Pourquoi ne peut-on pas organiser un tournoi où chaque équipe ne joue que trois matches.

Si chaque équipe joue trois matches, la somme des degrés de chaque sommet vaut : $5\times3 = 15$

On ne peut pas construire un graphe non ordonné où la somme des degrés est impaire puisque chaque arête (rencontre) est comptée deux fois en faisant la somme des degrés.

II-4- En mettant dans l'ordre alphabétique, écrire la matrice carrée (d'ordre 5) d'adjacence de ce graphe.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne (et chaque colonne) contient un seul " 0 " (sur la diagonale).

III- Six équipes A, B, C, D, E et F sont engagées.

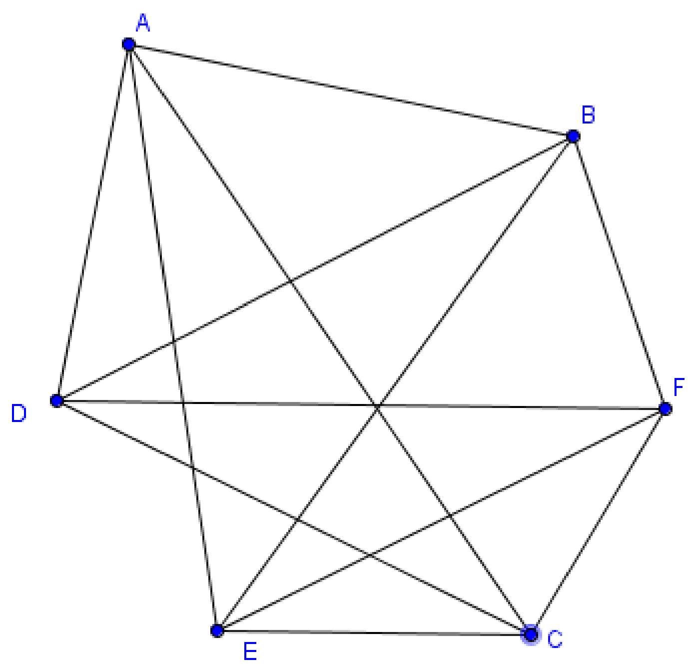
Pour une question de durée, le tournoi est organisé en quatre temps.

III-1- Recopier et compléter le planning le planning en quatre temps où chaque équipe rencontre une et une seule fois une autre équipe durant le tournoi.

1er temps	**2ème temps**	**3ème temps**	**4ème temps**
A rencontre B C rencontre D E rencontre F	A rencontre C B rencontre E D rencontre F	A rencontre D B rencontre F C rencontre E	A rencontre E B rencontre D C rencontre F

Quel est le nombre de matches dans ce tournoi ? 12 matches

III- 2- a) Faire un graphe où les sommets sont les équipes, où une arête signifie : " … et … se rencontrent. "



b) Combien le graphe a-t-il d'arêtes ? 12

Quel est le degré de chaque sommet ? 4

Quelle est la somme des degrés ? $6 \times 4 = 24$

Quel est le lien entre cette somme et le nombre de rencontres ? $2 \times 12 = 24$

III-3- Des équipes n'ont pas pu se rencontrer. Lesquelles ? A et F, B et C, D et E

Comment cela apparaît-il sur le graphe ? les sommets ne sont pas adjacents.

III-4- En mettant dans l'ordre alphabétique, écrire la matrice carrée (d'ordre 6) d'adjacence de ce graphe.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne (et chaque colonne) contient deux " 0 ".

IV- Sept équipes A, B, C, D, E, F et G sont engagées.

Comme au II- une équipe sera exempte à chaque temps.

Peut-on organiser le tournoi de façon à ce que chaque équipe fasse 4 matches ? 5 matches ?

Justifier votre réponse et quand cela est possible, établir un planning et donner le graphe correspondant.

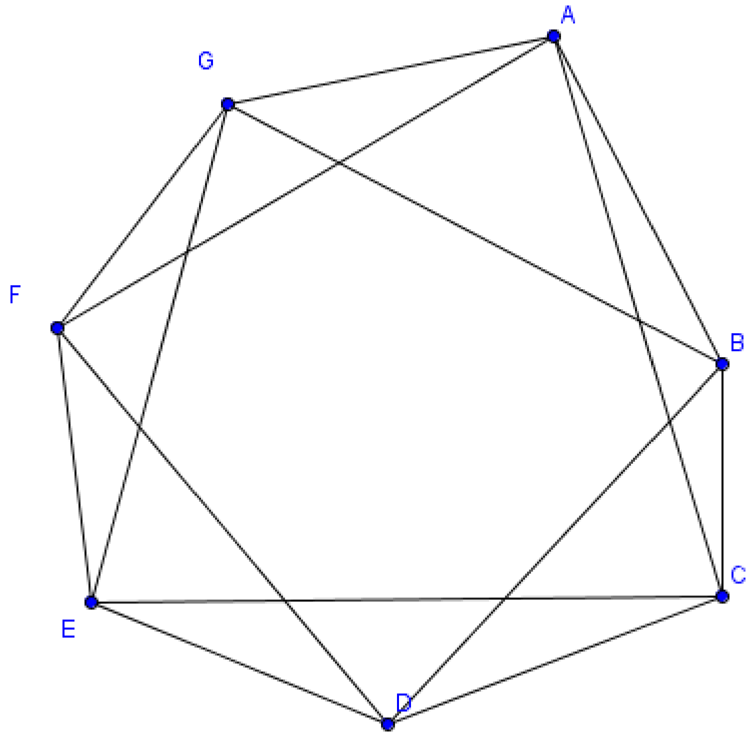
Si on accepte que les équipes ne fassent pas toutes le même nombre de matches, on peut organiser un tournoi lorsque la somme des degrés est paire.

On peut donc organiser pour 4 matches par équipes ($7 \times 4 = 28$, il y aura 14 arêtes)

Pour 5 matches, ce n'est pas possible.

Essayons pour quatre matches.

En disposant les équipes de façon à ce que chaque équipe rencontre les deux équipes " à sa droite " et les deux équipes " à sa gauche ", on peut faire :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ chaque équipe rencontre 4 équipes (et ne rencontrent pas deux autres équipes)

Il y aura à un moment trois équipes exemptes

1^er^ temps	**2^ème^ temps**	**3^ème^ temps**	**4^ème^ temps**	**5^ème^ temps**
A rencontre B C rencontre D F rencontre G E exempte	A rencontre C B rencontre G E rencontre F D exempte	A rencontre F B rencontre C E rencontre D G exempte	A rencontre G B rencontre D C rencontre E F exempte	D rencontre F E rencontre G A, B, C exemptes
A 1 B 1 C 1 D 1 E 0 F 1 G 1	A 1 + 1 B 1 + 1 C 1 + 1 D 1 + 0 E 0 + 1 F 1 + 1 G 1 + 1	A 1 + 1 + 1 B 1 + 1 + 1 C 1 + 1 + 1 D 1 + 0 + 1 E 0 + 1 + 1 F 1 + 1 + 1 G 1 + 1 + 0	A 1 + 1 + 1 + 1 = 4 B 1 + 1 + 1 + 1 = 4 C 1 + 1 + 1 +1 = 4 D 1 + 0 + 1 + 1 = 3 E 0 + 1 + 1 + 1 = 3 F 1 + 1 + 1 + 0 = 3 G 1 + 1 + 0 + 1 = 3	A 1 + 1 + 1 + 1 +0 B 1 + 1 + 1 + 1 +0 C 1 + 1 + 1 +1 + 0 D 1 + 0 + 1 + 1 + 1 E 0 + 1 + 1 + 1 + 1 F 1 + 1 + 1 + 0 + 1 G 1 + 1 + 0 + 1 + 1