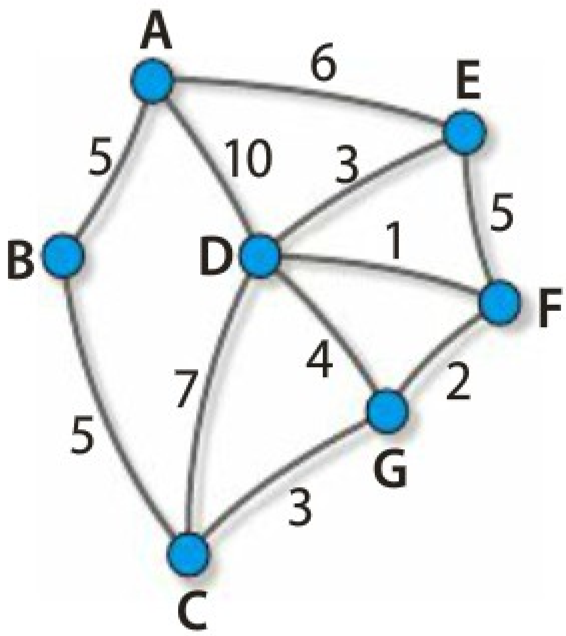
Index

Sujet B page 91



1) L'algorithme de Djistra permet de trouver le chemin de A à G en rencontrant le minimum d'obstacles :

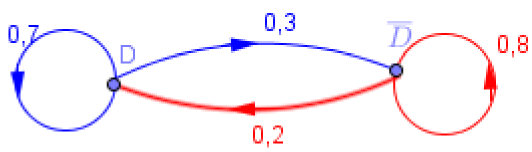
Nom des sommets	A	B	C	D	E	F	G
Le départ est affecté de 0, les autres de ∞.	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
les sommets adjacents à A … A est traité. On prend B...		5(A)	∞	10 (A)	6 (A)	∞	∞
… de poids minimal. Sommets adjacents à B. B est traité. On prend E ...			10 (B)	10 (A)	6 (A)	∞	∞
... de poids minimal. Sommets adjacents à E. E est traité. On prend D ...			10 (B)	9 (E)		11 (E)	∞
... de poids minimal. Sommets adjacents à D. D est traité. On prend C (*ou F*) ...			~~9 + 7 (D)~~ 10 (B)			10 (D)	13 (D)
... de poids minimal. Sommets adjacents à C. C est traité. On prend F ...						10 (D)	13 (D) (ou 13 (C))
... de poids minimal. Sommets adjacents à F. F est traité.							12 (F)

Tous les sommets sont traités …
La chaîne la plus courte a pour poids 12
c'est la chaîne A-E-D-F-G

2) a) graphe probabiliste :

événement D : courrier distribué

événement $\overline{D}$: courrier non distribué



La matrice de transition : M= $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

b) Soit $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste le jour *n*. $a_n + b_n = 1$

ou bien : $P_n = \begin{pmatrix} a_n & 1 - a_n \end{pmatrix}$

$$P_{n+1} = P_n \times M = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \times a_n + 0,2 \times b_n & 0,3 \times a_n + 0,8 \times b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$$

On a donc : $a_{n+1} = 0,7 a_n + 0,2 b_n = 0,7 a_n + 0,2(1 - a_n) = 0,5 a_n + 0,2$

(ou bien : $P_{n+1} = P_n \times M = \begin{pmatrix} a_n & 1 - a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \times a_n + 0,2 \times (1 - a_n) & 0,3 \times a_n + 0,8 \times (1 - a_n) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 - a_{n+1} \end{pmatrix}$

On en déduit : $a_{n+1} = 0,7 a_n + 0,2 - 0,2 a_n = 0,5 a_n + 0,2$)

c) Soit (u_n) définie par : $u_n = a_n - 0,4$

$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,4$, or, $a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,2$,

d'où, $u_{n+1} = 0,5 a_n + 0,2 - 0,4 = 0,5 a_n - 0,2 = 0,5(a_n - 0,4) = 0,5 u_n$.

(u_n) est donc une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,4 = 1 - 0,4 = 0,6$.

d) D'après ce qui précède : $u_n = u_1 \times (0,5)^{n-1} = 0,6 \times 0,5^{n-1}$

Or, $a_n = u_n + 0,4$

$a_n = 0,6 \times 0,5^{n-1} + 0,4$

Complément et conclusion :

Comme $0 < 0,5 < 1$, la suite (u_n) converge vers 0, donc, la suite (a_n) converge vers 0,4.

La matrice M ne comportant aucun 0, (P_n) converge vers l'état stable $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \times 0,7 + 0,6 \times 0,2 & 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Point méthode sur les suites géométriques

On a montré que (u_n) était une suite géométrique de raison q.

On connaît un des termes (en général le premier terme)

Si ce premier terme est u_0, on a : $u_n = u_0 \times q^n$

Si ce premier terme est u_1, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Plus généralement : si on connaît u_k , $u_n = u_k \times q^{n-k}$

C'est cette égalité qui permet de répondre à la question : exprimer en fonction de n ….