Exercice 1 le modèle de Léontief

Dans un pays imaginaire, l'économie dépend de trois secteurs : agriculture, biens manufacturés et énergie.

Pour pouvoir fonctionner, chaque secteur nécessite l'utilisation d'une partie de sa production, une partie de la production des deux autres secteurs et doit satisfaire à la demande extérieure (besoins de la population).

Ces échanges inter-industriels sont représentés dans le tableau suivant où l'unité de production est le milliard de de l'unité monétaire.

		consommation			
production d'		Agriculture	Biens	Énergie	**besoins de la population**
	1 unité d'agriculture	0,2	0	0	13,2 (unités d'agriculture)
	1 unité de biens	0,1	0,12	0,08	17,6 (unités de biens)
	1 unité d'énergie	0,05	0,08	0,12	1,8 (unité d'énergie)

On suppose que l'économie est équilibrée : la production totale de ces trois secteurs couvre les besoins intérieurs et extérieurs.

1) *On note x le nombre d'unités produites en agriculture, y celui d'unités produites en biens manufacturés et z celui d'unités produites en énergie.*

Expliquer pourquoi $0,1x + 0,12y + 0,08z + 17,6 = y$.

La production de y unités de biens nécessite $0,1\times x$ unités d'agriculture, $0,12\times y$ unités de biens et $0,08\times z$ unités d'énergie. (Demande interne).

Cette production doit satisfaire cette demande interne et la demande externe de 17,6 unités de biens.

D'où : $y = (0,1x + 0,12y + 0,08z) + 17,6$.

2) *Écrire un système de trois équations traduisant ce tableau d'échanges inter-industriels.*

$$\begin{cases} x=0,2\,x+13,2 \\ y=0,1\,x+0,12\,y+0,08\,z+17,6 \\ z=0,05\,x+0,08\,y+0,12\,z+1,8 \end{cases}$$

3) *Déterminer la matrice carrée A telle que* $A\times P + D = P$ *où* $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 13,2 \\ 17,6 \\ 1,8 \end{pmatrix}$

En posant A = $\begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,12 & 0,08 \\ 0,05 & 0,08 & 0,12 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,12 & 0,08 \\ 0,05 & 0,08 & 0,12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13,2 \\ 17,6 \\ 1,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2\,x+13,2 \\ 0,1\,x+0,12\,y+0,08\,z+17,6 \\ 0,05\,x+0,08\,y+0,12\,z+1,8 \end{pmatrix}$$

Comme, d'après le système, on sait : $\begin{pmatrix} 0{,}2\,x+13{,}2 \\ 0{,}1\,x+0{,}12\,y+0{,}08\,z+17{,}6 \\ 0{,}05\,x+0{,}08\,y+0{,}12\,z+1{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

L'égalité est vérifiée

*4) **Montrer** que $A \times P + D = P$ équivaut à $(I_3 - A) \times P = D$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.*

On soustrait $A \times P$ aux deux membres, et, on factorise P à droite en n'oubliant pas que $I_3 \times P = P$

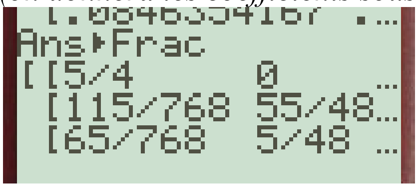
$A \times P + D = P$ équivaut à $D = P - A \times P$

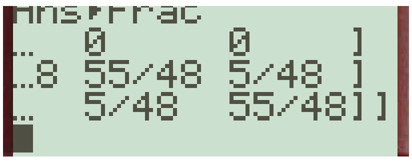
équivaut à $D = I_3 \times P - A \times P$

équivaut à $D = (I_3 - A) \times P$

5) On pose $L = I_3 - A$ (matrice de Léontief)

À l'aide de la calculatrice, écrire L^{-1} (on donnera les coefficients sous forme fractionnaire)





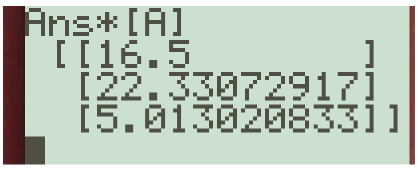
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}12 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}12 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}88 & -0{,}12 \\ -0{,}05 & -0{,}92 & 0{,}88 \end{pmatrix} \qquad L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ \frac{115}{768} & \frac{55}{48} & \frac{5}{48} \\ \frac{65}{78} & \frac{5}{48} & \frac{55}{48} \end{pmatrix}$$

6) Quelle doit être la production de chaque secteur pour que l'économie soit équilibrée ?

On a donc : $L \times P = D$, soit : $P = L^{-1} \times D$

On résout l'équation matricielle en calculant $L^{-1} \times D$



$x = 16{,}5$; $y = 22{,}330$ et $z = 5{,}013$ en milliards d'unité monétaire.

Bonus

7) On suppose pour l'année suivante que la demande intérieure n'est pas modifiée mais que la demande extérieure est donnée par :

besoins de la population
10,2 (unités d'agriculture)
18,5 (unités de biens)

besoins de la population
2 (unité d'énergie)

Quelle devra être la production de chaque secteur pour que l'économie soit équilibrée ?

Dans la dernière équation, il suffit de poser D = $\begin{pmatrix} 10{,}2 \\ 18{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de calculer $L^{-1} \times D$

On trouve : S = $\begin{pmatrix} \frac{51}{4} \\ \frac{5871}{256} \\ \frac{1301}{256} \end{pmatrix}$

Exercice 2 un peu de logique

I- On pose A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, calculer A².

A² = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(Ce sera un contre-exemple pour le III-3)*

II- On pose A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(Ce sera un contre-exemple pour le III-2)*

III- Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.

Si la phrase est vraie, la justifier à l'aide d'une propriété du cours.

Si la phrase est fausse, donner un contre-exemple.

A et B sont des matrices carrées d'ordre 2. I_2 est la matrice unité d'ordre 2, O_2 est la matrice nulle d'ordre 2.

1) Si $A^4 = I_2$ alors la matrice A est inversible.

VRAI. La matrice inverse est A^3 puisqu'on a : $A^4 = A^3 \times A = A \times A^3 = I_2$.

(Définition d'une matrice inversible)

2) Si A est une matrice inversible alors $A^4 = I_2$.

FAUX.

Contre-exemple :

La matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car dét(A) = 1 – 0 = 1 et $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Si $A \times B = O_2$ alors $A = O_2$ ou $B = O_2$.

FAUX

Contre-exemple $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Si $A = O_2$ ou $B = O_2$ alors $A \times B = O_2$.

VRAI : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Quelques rappels sur le traitement des implications :

Une implication s'énonce au lycée sous la forme :

Si (Condition suffisante) alors ((Condition nécessaire).

Ne confondez pas dans l'étude, la recherche de la validité de l'implication et son utilisation dans une démarche démonstrative.

Validité de l'implication (Vrai-Faux)

L'implication est vraie lorsqu'en se donnant la condition nécessaire, on a nécessairement la condition suffisante.

Exemple : au 3/, on se donne le produit $A \times B = O_2$ et on se demande :

est-ce que nécessairement $A = O_2$ ou $B = O_2$ Le calcul au début de l'exercice montre qu'il est possible d'avoir A et B non nuls et d'avoir le produit nul.

au 4/, on se donne $A = O_2$ *(ou $B = O_2$)*, et on se demande :

est-ce que nécessairement le produit $A \times B = O_2$

le calcul montre qu'effectivement on trouve le produit nul.

Utilisation de l'implication dans le raisonnement :

Lors de l'utilisation d'un théorème énoncé sous la forme (Si (Hypothèse) alors (Conclusion)),

on vérifie l'hypothèse pour conclure …

Exemple : Vous avez appris la propriété suivante :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I,

si la dérivée $f'(x)$ est positive sur I alors f est croissante sur I.

Pour appliquer cette propriété, vous devez :

- dériver la fonction f,

- montrer que $f'(x)$ est un nombre positif pour tout réel x d'un intervalle I.

Lorsque ceci est fait, vous pouvez alors conclure :

- la fonction est croissante sur I.