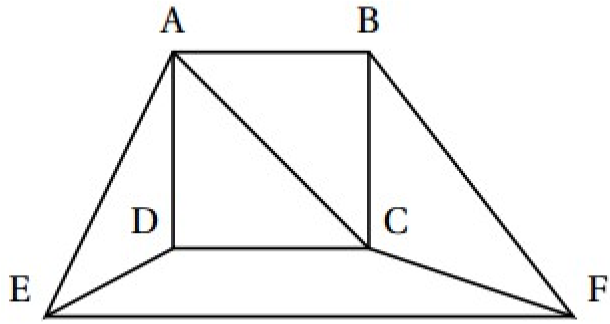
Sujet : Polynésie 10 septembre 2014 Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent les principales avenues et les sommets du graphe les carrefours entre ces avenues.



1. *Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.*

L'ordre d'un graphe étant le nombre de ses sommets, ce graphe est donc d'ordre 6.

Le degré d'un sommet étant le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet, on a :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	3	4	3	3	3

2. *Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue:*

a) *en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ ? Justifier la réponse.*

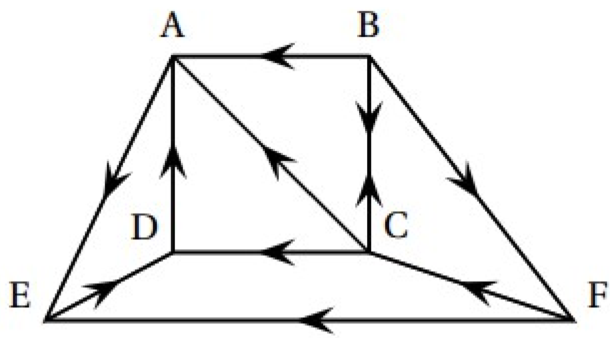
Un tel parcours partant d'un sommet et revenant à ce sommet sans emprunter plusieurs fois la même arête est un cycle eulérien.
Or un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si chaque sommet est de degré pair, ce qui n'est pas le cas.
Par conséquent, il n'existe pas un tel chemin.

b) *en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent ? Justifier la réponse.*

Un tel parcours partant d'un sommet et arrivant à un autre sommet sommet sans emprunter plusieurs fois la même arête est un chemin eulérien.
Or un graphe admet un chemin eulérien si et seulement si il a exactement deux sommets de degrés impairs, ce qui n'est pas le cas.
Par conséquent, il n'existe pas un tel chemin.

Partie B

Dans le graphe ci-contre, on a indiqué, pour cette même ville, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes avenues.



1. *Peut-on trouver un trajet de longueur quelconque qui permet d'aller de D à B en respectant les sens de circulation ?* Justifier la réponse.

On cherche tous les chemins partant de D, et, du sommet D, il n'y a qu'un arc qui part vers A donc on ne peut aller que vers A.
Puis, du sommet A, il n'y a qu'un arc qui part vers E donc on ne peut aller que vers E.
Du sommet E, il n'y a qu'un arc qui part vers D donc on ne peut aller que vers D.
Du sommet D, on ne peut se rendre que vers A, vers E ou vers D; il n'y a donc pas de trajet qui permet d'aller de D à B.

2. *Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique)*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *On donne la matrice* $M^3 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Que représentent les coefficients de cette matrice ?*
En numérotant les sommets 1, 2, 3, 4, 5 et 6, le nombre situé à l'intersection de la ligne i ($1 \leqslant i \leqslant 6$) et de la colonne j ($1 \leqslant j \leqslant 6$) de la matrice M^3 donne le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet numéro i au sommet numéro j.

b) *Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A ? Écrire tous ces chemins*.
Le sommet B étant le 2ième sommet et le sommet A est le premier, le nombre situé à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne 1 de la matrice M^3 étant égal à 3, il y a 3 chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A.
Ces trois chemins sont : BC – CD – DA ; BF – FC – CA ; BC – CB – BA.

c) *Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 arrivant au point E? Expliquer la démarche.*
Le sommet E est le 5ième sommet; le nombre de chemins arrivant en E sont donc situés dans la colonne 5 de la matrice M^3.
Nombre de chemins de longueur 3 allant de A vers E : 0
Nombre de chemins de longueur 3 allant de B vers E : 1
Nombre de chemins de longueur 3 allant de C vers E : 3
Nombre de chemins de longueur 3 allant de D vers E : 0
Nombre de chemins de longueur 3 allant de E vers E : 1
Nombre de chemins de longueur 3 allant de F vers E : 1
On obtient donc au total 0+1+3+0+1+1 = 6 chemins de longueur 3 arrivant au point E