Exercice 1 Opérations sur les matrices 3 points

Pour la réalisation de ses chantiers, une entreprise de gros-œuvre du bâtiment achète, auprès de deux fournisseurs A et B, le béton (en m^3), les briques (en nombre de palettes) et les charpentes (en m^3).

Sa commande de matériaux pour le premier semestre est représentée par la matrice S_1 : $S_1 = \begin{pmatrix} 125 & 102 \\ 79 & 95 \\ 24 & 20 \end{pmatrix}$ en notant dans la première colonne les quantités de béton, de briques et de charpentes commandées auprès du fournisseur A, et dans la deuxième colonne celles commandées auprès du fournisseur B.

La commande pour le second semestre est représentée par la matrice S_2 : $S_2 = \begin{pmatrix} 157 & 75 \\ 95 & 101 \\ 14 & 31 \end{pmatrix}$

1) Représenter par une matrice S la commande de matériaux pour l'année 2011.

2) Les prix unitaires de chaque matériau sont représentés pour le premier semestre par la matrice P_1 :

$P_1 = \begin{pmatrix} 275 & 515 & 2518 \\ 297 & 495 & 2425 \end{pmatrix}$ en notant dans la première ligne les prix unitaires du béton, des briques et des charpentes chez le fournisseur A, et dans la deuxième ligne ceux chez le fournisseur B.

Au second semestre, ces prix ont augmenté globalement de 2 % chez chaque fournisseur.

Donner la matrice P_2 représentant les prix unitaires de chaque matériau pour le second semestre

3) Calculer la dépense de l'entreprise par matériau et par fournisseur au premier semestre.

Exercice 2 Matrices et systèmes 4 points

L'objectif du problème est de chercher s'il existe une fonction f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la courbe représentative passe par les points A(1 ; 0), B(–1 ; –2) et C(2 ; 7).

1) Démontrez que le problème est équivalent à la résolution du système (S) : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=-2 \\ 4a+2b+c=7 \end{cases}$.

2) On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Déterminez les matrices M et N telles que le système (S) soit équivalent à l'équation matricielle MX = N.

3) Résoudre le problème.

Exercice 3 Graphe probabiliste 3 points

Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,9.

Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,4.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :
a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;

$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état " Alice atteint la cible " et B l'état " Alice manque sa cible ").

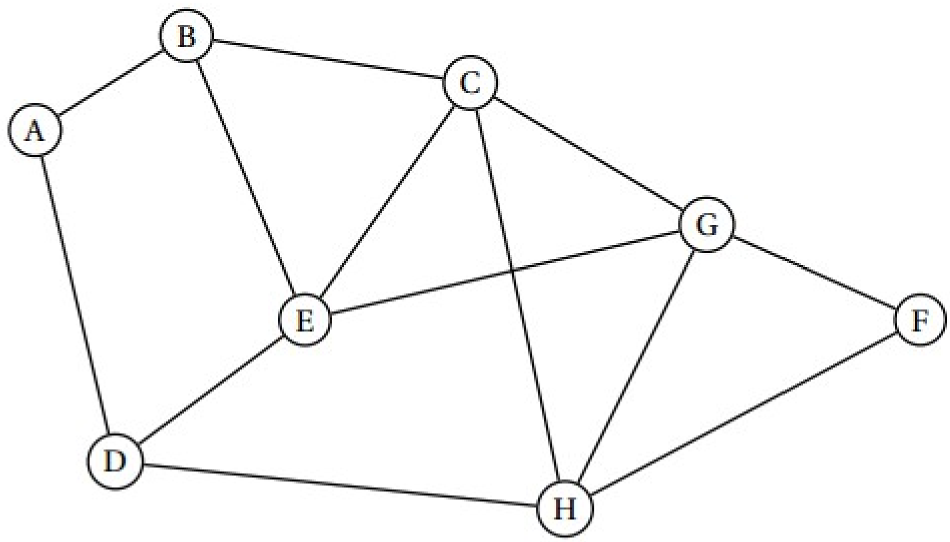
Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe.

On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).

Donner P_1 et calculer P_2.

Exercice 4 Graphes Amérique du Nord mai 2014 10 points

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :



Partie A

1) Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathcal{G}$ est :

a) complet ;

b) connexe.

2) a) Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en

empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.

b) Citer un trajet de ce type.

3) On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).

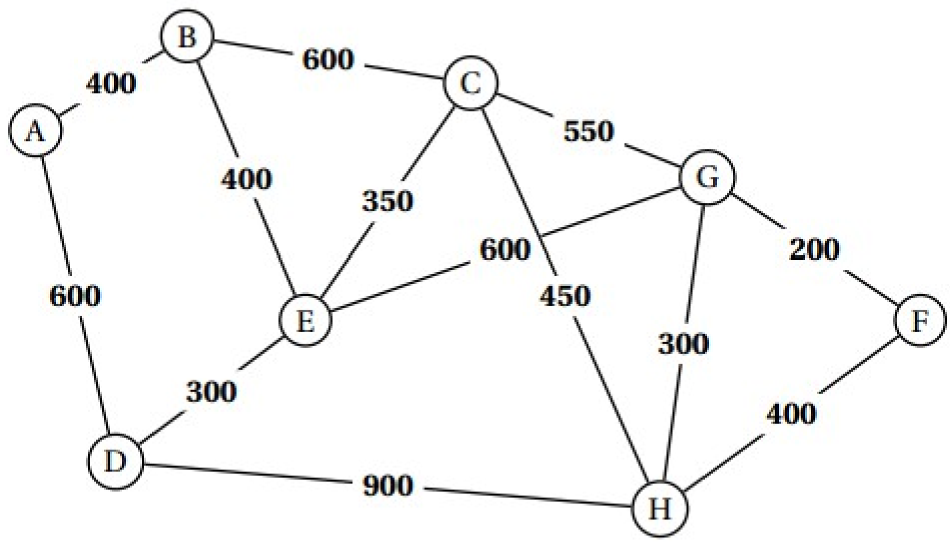
a) Déterminer la matrice M.

b) On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H.
Préciser ces chemins.

Partie B

Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A. Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F.
Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.