Exercice 1 Opérations sur les matrices

Pour la réalisation de ses chantiers, une entreprise de gros-œuvre du bâtiment achète, auprès de deux fournisseurs A et B, le béton (en m^3), les briques (en nombre de palettes) et les charpentes (en m^3).

Sa commande de matériaux pour le premier semestre est représentée par la matrice S_1 : $S_1 = \begin{pmatrix} 125 & 102 \\ 79 & 95 \\ 24 & 20 \end{pmatrix}$ en notant dans la première colonne les quantités de béton, de briques et de charpentes commandées auprès du fournisseur A, et dans la deuxième colonne celles commandées auprès du fournisseur B.

La commande pour le second semestre est représentée par la matrice S_2 : $S_2 = \begin{pmatrix} 157 & 75 \\ 95 & 101 \\ 14 & 31 \end{pmatrix}$

1) Représenter par une matrice S la commande de matériaux pour l'année 2011.

$S = S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} 125 & 102 \\ 79 & 95 \\ 24 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 157 & 75 \\ 95 & 101 \\ 14 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 282 & 177 \\ 174 & 196 \\ 38 & 51 \end{pmatrix}$.

2) Les prix unitaires de chaque matériau sont représentés pour le premier semestre par la matrice P_1 :

$P_1 = \begin{pmatrix} 275 & 515 & 2518 \\ 297 & 495 & 2425 \end{pmatrix}$ *en notant dans la première ligne les prix unitaires du béton, des briques et des charpentes chez le fournisseur A, et dans la deuxième ligne ceux chez le fournisseur B.*

Au second semestre, ces prix ont augmenté globalement de 2 % chez chaque fournisseur.

Donner la matrice P_2 représentant les prix unitaires de chaque matériau pour le second semestre

$P_2 = 1{,}02 \times P_1 = \begin{pmatrix} 280{,}5 & 525{,}3 & 2568{,}36 \\ 302{,}94 & 504{,}9 & 2473{,}5 \end{pmatrix}$.

Savoir et nécessité de le faire lots des études de suites (notamment suite géométrique) :

Augmenter de t % revient à multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$,

Diminuer de t % revient à multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.

Preuve : Soit une quantité q.

Après augmentation de t %, la nouvelle quantité est $q' = q + \dfrac{t}{100} q = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right) q$.

Après diminution de t %, la nouvelle quantité est $q' = q - \dfrac{t}{100} q = \left(1 - \dfrac{t}{100}\right) q$.

Attention : Exprimer par un pourcentage est une façon de donner le coefficient multiplicateur lors de la donnée de la proportionnalité …

Dans les calculs, on n'écrit jamais t % (ce n'est pas un nombre mais un ensemble de données (voir la phrase précédente). Dans le calcul, on écrit $\dfrac{t}{100}$.

Ici : 2 % mène au coefficient : $\frac{2}{100}$ = 0,02 et non 0,2 qui serait celui associé à $\frac{20}{100}$.

3) *Calculer la dépense de l'entreprise par matériau et par fournisseur au premier semestre.*

Fournisseur A : Béton : $275\times125 = 34\ 375$ Briques : $515\times79 = 40\ 685$

Charpentes : $2518\times24 = 60\ 432$

Fournisseur B : Béton : $297\times102 = 30\ 294$ Briques : $495\times95 = 47\ 025$

Charpentes : $2425\times20 = 48\ 500$

Commentaires : Quelques erreurs de lecture (?) …

On a les prix **unitaires** dans la matrice P_1 ,

autrement dit : **une seule** unité de béton (ici : 1 m^3) coûte 275 € chez le fournisseur A

pour 125 m^3 , la dépense sera de …...

Exercice 2 Matrices et systèmes

L'objectif du problème est de chercher s'il existe une fonction f telle que f (x) = ax² + bx + c dont la courbe représentative passe par les points A(1 ; 0), B(–1 ; –2) et C(2 ; 7).

1) Démontrez que le problème est équivalent à la résolution du système (S) : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=-2 \\ 4a+2b+c=7 \end{cases}$.

A ∈ C_f, d'où, $f(1) = 0$, soit : $a + b + c = 0$

B ∈ C_f, d'où, $f(-1)= -2$, soit : $a - b + c = -2$

C ∈ C_f, d'où, $f(2) = 7$, soit : $4a + 2b + c = 7$

Réflexe : Soit une courbe d'équation connue (E) (Une équation contient un signe = et met en relation les coordonnées d'un point de la courbe).

Un point $A(x_A ; y_A)$ appartient à cette courbe si et seulement si ses coordonnées x_A et y_A vérifient l'équation de cette courbe.

Ici : la courbe représente une fonction *f*, d'où, son équation est $y = f(x)$.

2) On pose X = $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Déterminez les matrices M et N telles que le système (S) soit équivalent à l'équation matricielle MX = N.

On pose M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et N = $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -2\\ 7\end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{cases} a+b+c=0\\ a-b+c=-2\\ 4a+2b+c=7\end{cases}$.

3) Résoudre le problème.

On est donc amené à résoudre l'équation matricielle $MX = N$.
Cours : Si M est inversible alors la solution de l'équation matricielle est la matrice $S = M^{-1}N$.

À la calculatrice, on trouve que M est inversible.

$X = M^{-1}\times N = \begin{pmatrix}2\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$.

La fonction f est la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + x - 3$
(Vérification : $f(1) = 2 + 1 - 3 = 0$, $f(-1) = 2 - 1 - 3 = -2$, $f(2) = 8 + 2 - 3 = 7$)
Commentaire : ne pas oublier de conclure l'exercice.

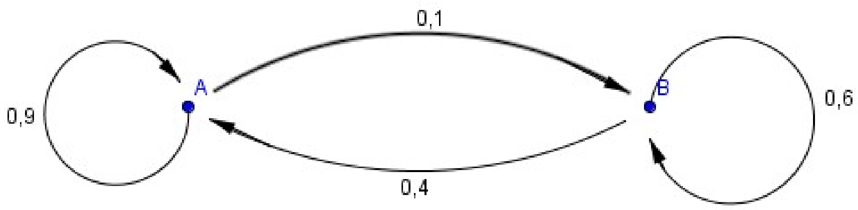
Exercice 3 Graphe probabiliste

Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,9.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,4.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :
a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;

$P_n = \begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état " Alice atteint la cible " et B l'état " Alice manque sa cible ").



Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe.

On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).

$M = \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$

Donner P_1 *et calculer* P_2.

$P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ car, on suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5\times 0,9+0,5\times 0,4 & 0,5\times 0,1+0,5\times 0,6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,45+0,2 & 0,05+0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$$

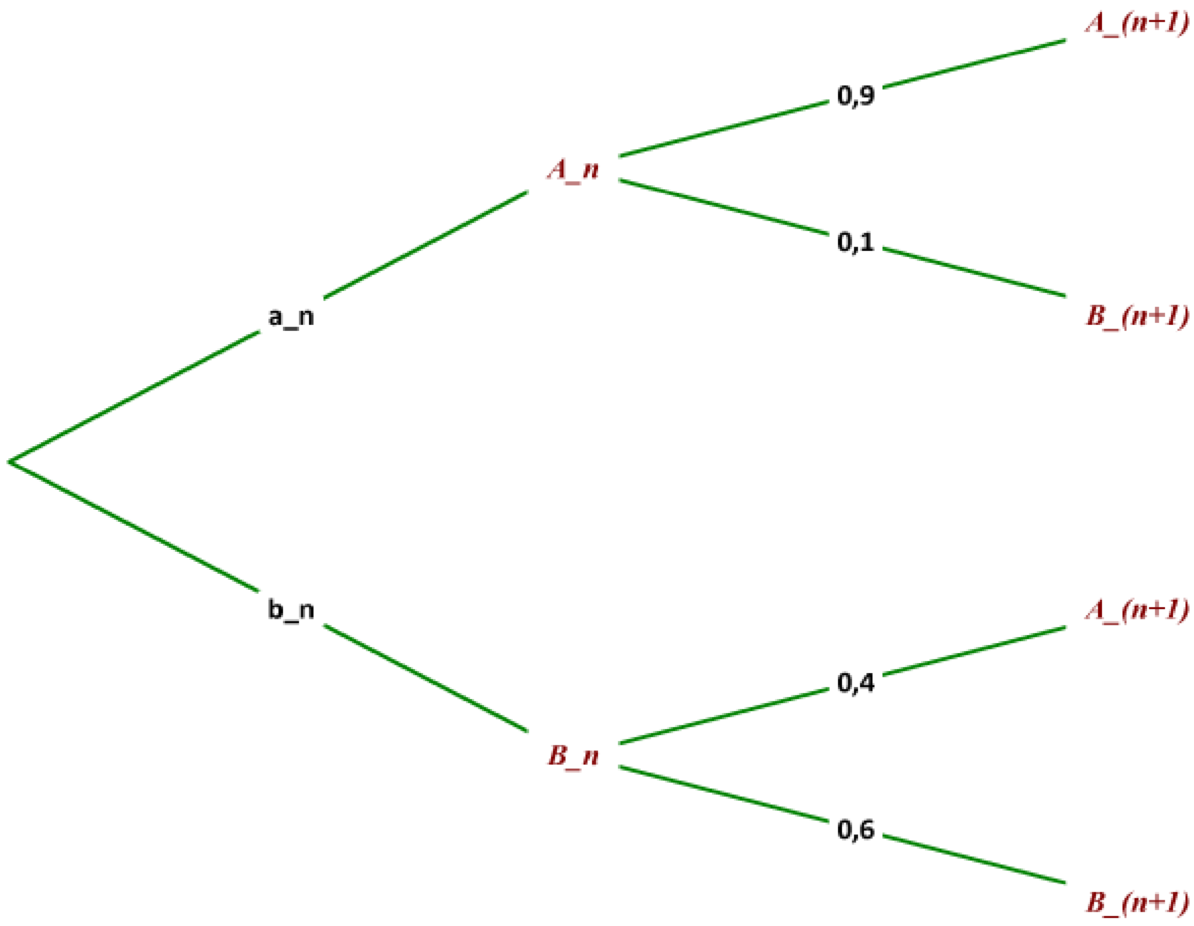
Quelques confusions dans les probabilités :

La matrice de transition est la matrice M = $\begin{pmatrix} P_A(A) & P_A(B) \\ P_B(A) & P_B(B) \end{pmatrix}$

La matrice donnant l'état probabiliste au lancer *n* est la matrice $\begin{pmatrix} P(A) & P(B) \end{pmatrix}$ où P(A) est la probabilité pour Alice d'atteindre A à ce lancer *n*, et, P(B) est celle de ne pas atteindre la cible.

La matrice de transition permet de calculer la probabilité au lancer suivant : $P_{n+1} = P_n \times M$

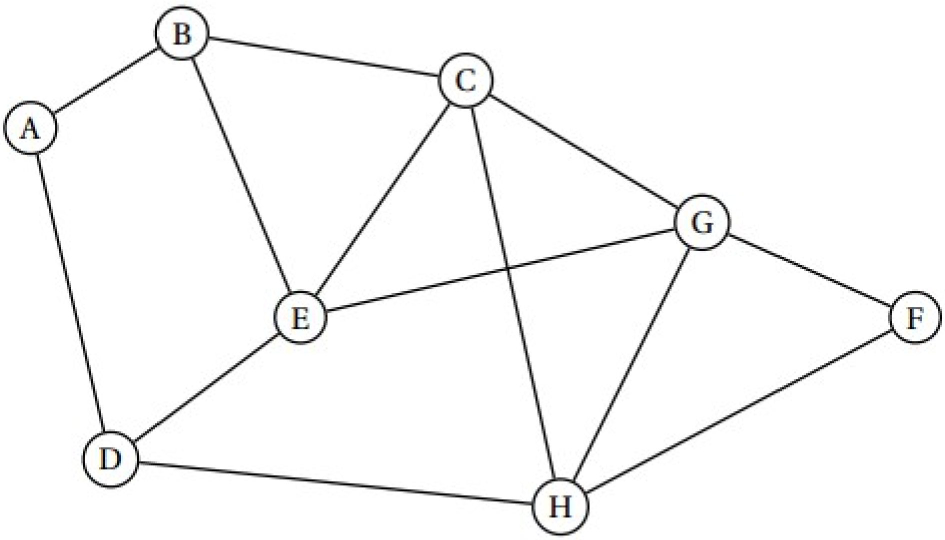
Sur un arbre de probabilité :



L'état $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ et $P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_n\times 0,9+b_n\times 0,4 & a_n\times 0,1+b_n\times 0,6 \end{pmatrix}$

Exercice 4 Graphes Amérique du Nord mai 2014

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :



Partie A

1) Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathcal{G}$ est :

a) complet ;

le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas complet … certains sommets ne sont pas reliés (par exemple, A et E ne sont pas reliés).

b) connexe.

le graphe $\mathcal{G}$ est connexe. Aucun sommet n'est isolé.

Il existe un chemin reliant deux sommets quelconques de ce graphe.

2) a) Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.

Un tel trajet correspond à une chaîne eulérienne.

On détermine les degrés de chaque sommet.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	2	3	4	3	4	2	4	4

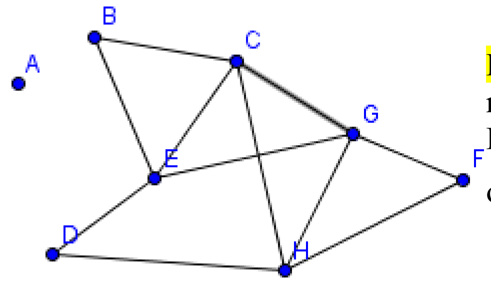
D'après le théorème d'Euler, comme il y a exactement deux sommets de degré impair, B et D, il existe un chemin eulérien reliant ces deux sommets.

b) Citer un trajet de ce type.

Rappel d'une méthode :

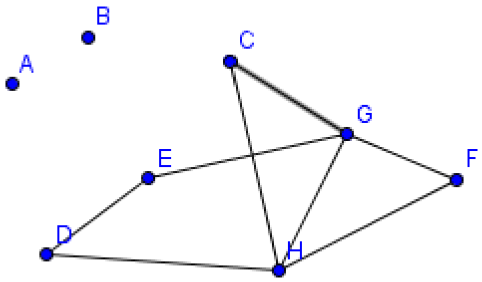
On crée une chaîne de B à D empruntant une et une seule fois chaque arête (on marque (ou efface) les arêtes empruntées). À partir d'un sommet de cette chaîne, on insère une boucle empruntant une et une seule fois chaque arête (on marque (ou efface) les arêtes empruntées). On réitère jusqu'à épuisement des arêtes.

Exemple :

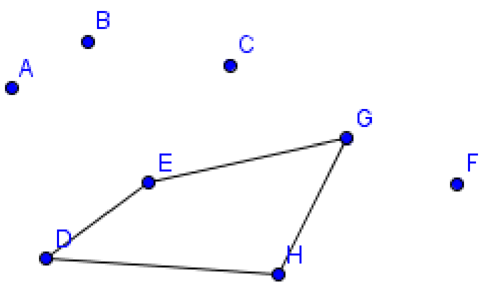


B-A-D les arêtes B-A et A-D sont effacées (ou marquées) et on remplace le sommet B par la boucle B-E-C-B qu'on insère … (les arêtes B-E, E-C, C-B sont effacées)

on a donc : B-E-C-B-A-D



on insère la boucle C-G-F-H-C- (on efface C-G, G-F, F-H, H-C)



on a donc : B-E- C-G-F-H-C-B-A-D on insère la boucle H-D-E-C-H-

B-E-C-G-F-H-D-E-C-H-C-B-A-D

Un autre chemin eulérien :

B – A – D – E – B – C – E – G – C – H – F – G – H – D

3) On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).

a) Déterminer la matrice M.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H.

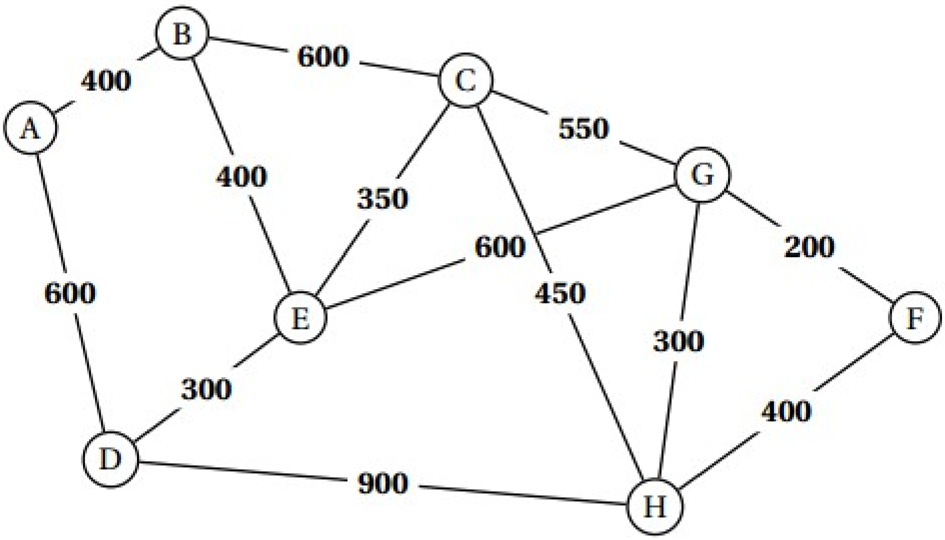
4 chemins (ligne 5, colonne 8) de longueur 3 reliant E à H

Préciser ces chemins.

E-B-C-H ; E-C-G-H ; E-G-F-H ; E-G-C-H

Partie B

Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A. Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F. Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

A	B	C	D	E	G	H	F
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	400 (A)	∞	600 (A)	∞	∞	∞	∞
		1000 (B)	600 (A)	800 (B)	∞	∞	∞
		1000 (B)		800 (B) (~~inférieur à 900 (D)~~)	∞	1 500 (D)	∞
		1000 (B) (~~inférieur à 1150 (E)~~)			1400 (E)	1 500 (D)	∞
					1400 (E) (~~inférieur à 1550 (C)~~)	1450 (C)	∞
						1450 (C) (~~inférieur à 1700 (G)~~)	1600 (G)
							1600 (G) (~~inférieur à 2000 (H)~~)

Trajet de longueur minimale : A-B-E-G-F de longueur 1 600 km.

Rappel de la méthode : Algorithme de Djikstra.

Le principe : Si le plus court chemin reliant S (départ) à F (arrivée) passe par les sommets s1, s2, …, sk alors, les différentes étapes sont aussi les plus courts chemins reliant S aux différents sommets s1, s2, …, sk.

Le sommet de départ est S :

ligne 1 : On affecte le poids 0 au sommet origine S et on attribue provisoirement un poids ∞ aux autres sommets.

(Ici : le sommet S est A d'après l'énoncé).

ligne 2 : On cherche les sommets adjacents à S auxquels on attribue leur pondération et on prend comme nouveau sommet de départ celui qui a la pondération la plus faible (qui devient donc le sommet S de l'algorithme). (On indexe par le sommet d'où on vient).

Le premier sommet est traité (on " barre " la colonne)

(Ici : B et D sont adjacents à A, et, la distance la plus courte est la distance AB = 400.

B devient le sommet à traiter.)

L'étape suivante est répétée jusqu'au moment où le sommet d'arrivée est affecté de son poids définitif.

(Une nouvelle ligne à chaque itération)

On cherche les sommets non traités adjacents à S.

Soit X un de ces sommets. On attribue à X la somme du poids de S et du poids de l'arête SX si cette somme est inférieure à la pondération actuelle de X.

Lorsque tous les sommets adjacents sont affectés d'un poids, le sommet ayant la pondération la plus faible devient le nouveau sommet S.

(On indexe par le sommet d'où on vient).

(on " barre " la colonne du sommet qui vient d'être traité).

Ici :

Première itération :

les sommets non traités adjacents à B sont C et E. C est affecté du poids 400 + 600 et E du poids 400 + 400.

On n'oublie pas de noter D de poids 600.

D devient donc le sommet à traiter. (On barre la colonne de B)

Deuxième itération :

Les sommets non traités adjacents à D sont E et H. Comme 600 + 300 est supérieur à 800, on garde le poids 800 pour E. H est affecté du poids 600 + 900 = 1500.

On n'oublie pas de noter C de poids 1 000.

E devient donc le sommet à traiter. (On barre la colonne de D)

Troisième itération :

Les sommets non traités adjacents à E sont C et G. Comme 800 + 350 est supérieur à 1000, on garde le poids 1 000 pour C. G est affecté du poids 800 + 600 = 1400.

On n'oublie pas de noter H de poids 1 500.

C devient donc le sommet à traiter. (On barre la colonne de E)

Quatrième itération :

Les sommets non traités adjacents à C sont G et H. Comme 1 000 + 550 est supérieur à 1 400, on garde le poids 1 400 pour G. H est affecté du poids 1 000 + 450 = 1450 (car 1450 < 1 500).

G devient donc le sommet à traiter. (On barre la colonne de C).

Cinquième itération :

Les sommets non traités adjacents à G sont F et H. F est affecté du poids 1 400 + 200 et H garde le poids 1 450 puisque 1 450 < 1 400 + 300

H devient donc le sommet à traiter. (On barre la colonne de G).

Dernière itération :

Le seul sommet non traité adjacent à H est F et comme 1 450 + 400 > 1 600, l'algorithme se termine ici.

On remonte le chemin grâce à l'indexation …

Pour arriver à F, on venait de G … de E … de B … de A …