

Exercice 1

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.

L'étude révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état : la personne " pratique le ski de piste " et \bar{S} l'état : " la personne pratique le snowboard ".

On note également pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n -ième hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n -ième hiver;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n -ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc : $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et \bar{S} .
2. a) Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
b) Calculer M^2 .
c) Déterminer l'état probabiliste P_2 .
3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
②	J et N sont des entiers naturels
③	p est un nombre réel
Entrée :	
④	Saisir N
Initialisation :	
⑤	p prend la valeur 1
Traitement :	
⑥	Pour J allant de 1 à N
⑦	p prend la valeur
⑦	Fin Pour
Sortie :	
⑧	Afficher p

Recopier et compléter la ligne ⑦ de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_N .

Partie B

On considère, pour tout entier naturel n , l'événement S_n : " la personne pratique le ski de piste lors du n -ième hiver " . La

probabilité de l'événement S_n est notée $p(S_n)$.

On a donc $p_n = p(S_n)$.

On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,5 p_n + 0,3$.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,6$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de u_0 .
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

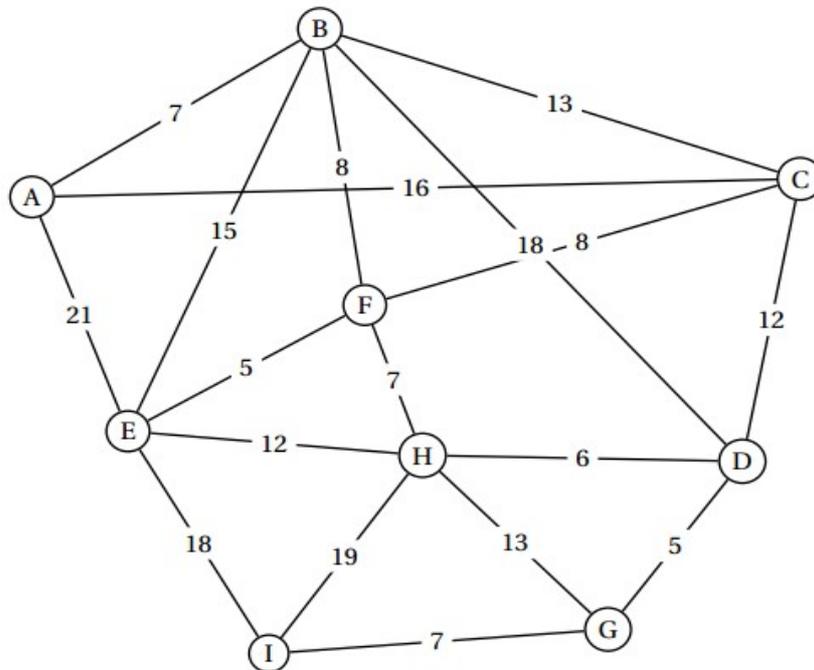
Partie C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.

Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.

Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.

Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

Exercice 2

1) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice M est inversible.

2) Soit Δ la droite d'équation $y = ax + b$ passant par $A(1; 2)$ et $B\left(\frac{3}{5}; 1\right)$.

a) Montrer que a et b sont solutions du système (Σ) :
$$\begin{cases} 3a + 5b = 5 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

b) Justifier que le système (Σ) équivaut à l'équation matricielle $MX = N$ où $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et déterminer a et b .