Derniers conseils avant l'épreuve :

Un devoir de mathématiques n'est pas une liste de résultats, mais, une composition argumentée ….

- Écrivez un texte introductif (une matrice isolée, un graphe seul, une relation arrivée d'on ne sait où … sont à bannir).

- Écrivez les liens logiques après vous êtes assurés qu'il y avait bien ce lien logique. (Les " donc ", les " car " qui relient des notions indépendantes sans lien de " cause " et " conséquence " montrent que vous ne savez pas de quoi vous parlez … c'est inquiétant!)

- Quand vous utilisez une notion étudiée en classe, nommez-la ; quand vous utilisez un théorème, une propriété démontrée en classe, rappelez cette propriété … (Exemples dans ce devoir : le déterminant de … à l'exercice 2,

$0 < 0,5 < 1$ pour justifier la limite au B/ de l'exercice 1/)

- Respectez les notations de l'énoncé : une majuscule n'est pas une minuscule ….

 un indice s'écrit " en indice "

 un exposant s'écrit " en exposant "

Cela suppose que vous pensez à ce que vous écrivez … c'est-à-dire :

P_n " on pense : **l'état** probabiliste la *n*-ième journée "

p_n " on pense : la probabilité de pratiquer du ski la *n*-ième journée ", et,

p_{n+1} : " on pense : la probabilité de pratiquer du ski la journée suivante" …

On ne confond pas l'état probabiliste et la probabilité de pratiquer du ski.

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.

L'étude révèle que :

- *Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.*
- *Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.*

On note S l'état : la personne " pratique le ski de piste " et $\overline{S}$ l'état : " la personne pratique le snowboard ".

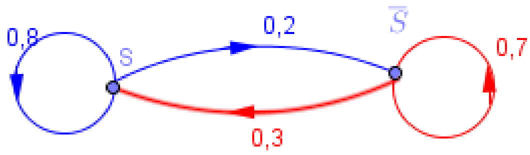
On note également pour tout entier naturel n :

- p_n *la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;*
- q_n *la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver;*
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ *la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième hiver.*

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc :
$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie A

1. *Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\overline{S}$.*
D'après le texte :
Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2, on a : $P_S(\overline{S}) = 0{,}2$, d'où : $P_S(S) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3, on a : $P_{\overline{S}}(S) = 0{,}3$, d'où $P_{\overline{S}}(\overline{S}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.
Ce qui mène au graphe suivant :



2. *a) Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.*
On cherche une matrice M de format 2×2, telle que $P_{n+1} = P_n \times M$,
Comme
$P_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix}$ et $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ et $p_{n+1} = 0{,}8 \times p_n + 0{,}3 \times q_n$ et $q_{n+1} = 0{,}2 \times p_n + 0{,}7 \times q_n$, on a :
$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$
b) Calculer M^2.
$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8\times0{,}8+0{,}2\times0{,}3 & 0{,}8\times0{,}2+0{,}2\times0{,}7 \\ 0{,}3\times0{,}8+0{,}3\times0{,}3 & 0{,}3\times0{,}2+0{,}7\times0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$
c) Déterminer l'état probabiliste P_2.
$P_2 = P_1 \times M = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 1\times0{,}7+0\times0{,}45 & 1\times0{,}3+0\times0{,}55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

3. *Montrer que pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}3$.*
Comme
$P_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix}$ et $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$
On sait : $p_{n+1} = 0{,}8 \times p_n + 0{,}3 \times q_n$ et, puisque $q_n = 1 - p_n$, on a donc,
$p_{n+1} = 0{,}8 \times p_n + 0{,}3 \times (1 - p_n) = 0{,}5\, p_n + 0{,}3$

Commentaires :

Cette **relation de récurrence** est celle qui permet de faire la boucle " Pour *J* allant de 1 à N "
En effet, elle signifie : connaissant la valeur de *p* à la date *n*, je calcule la valeur de *p* à la date *n*+1 de la façon suivante : je prends *p* , je le multiplie par 0,5, j'ajoute 0,3, j'obtiens la nouvelle valeur de *p*.

4. *On considère l'algorithme suivant :*

Variables :	
①	J et N sont des entiers naturels
②	p est un nombre réel
Entrée :	
③	Saisir N
Initialisation :	
④	p prend la valeur 1
Traitement :	
⑤	Pour J allant de 1 à N
⑥	p prend la valeur ………...
⑦	Fin Pour
Sortie :	
⑧	Afficher p

Recopier et compléter la ligne ⑥ de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_N.

⑥ p prend la valeur $0{,}5\times p + 0{,}3$

Partie B

On considère, pour tout entier naturel n, l'événement S_n : " la personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ". La probabilité de l'événement S_n est notée $p(S_n)$.

On a donc $p_n = p(S_n)$.

On sait d'après la ***partie A*** *que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$.*

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0{,}6$.

1. *Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de u_0.*
   On cherche u_{n+1} en fonction de u_n.
   Par définition de la suite (u_n) : $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}6$
   Par définition de la suite (p_n) : $p_{n+1} = 0{,}5\,p_n + 0{,}3$, d'où,
   $u_{n+1} = 0{,}5\,p_n + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}5\,p_n - 0{,}3$
   En factorisant 0,5, il vient : $u_{n+1} = 0{,}5(p_n - 0{,}6) = 0{,}5u_n$

   (On peut aussi faire : Comme $u_n = p_n - 0{,}6$, on a : $p_n = u_n + 0{,}6$.
   d'où : $u_{n+1} = 0{,}5\,p_n - 0{,}3 = 0{,}5(u_n + 0{,}6) - 0{,}3 = 0{,}5u_n$).

   La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $u_0 = p_0 - 0{,}6 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

2. *En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.*
La suite (u_n) étant une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme u_0 , il vient :
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = u_o \times q^n = 0{,}4 \times (0{,}5)^n$, puis, $p_n = u_n + 0{,}6 = 0{,}4 \times (0{,}5)^n + 0{,}6$
3. *Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.*
Comme la raison 0,5 est telle que $-1 < 0{,}5 < 1$, la suite géométrique de raison 0,5 converge vers 0, et, par somme, la suite (p_n) converge vers 0,6.
Le nombre p_n est la probabilité qu'une personne pratique le ski lors du n-ième hiver.
Comme cette probabilité tend vers 0,6, le nombre de personnes pratiquant du ski de piste tend à se rapprocher de 60% .
L'état stable est $P = (0{,}6 \quad 0{,}4)$.

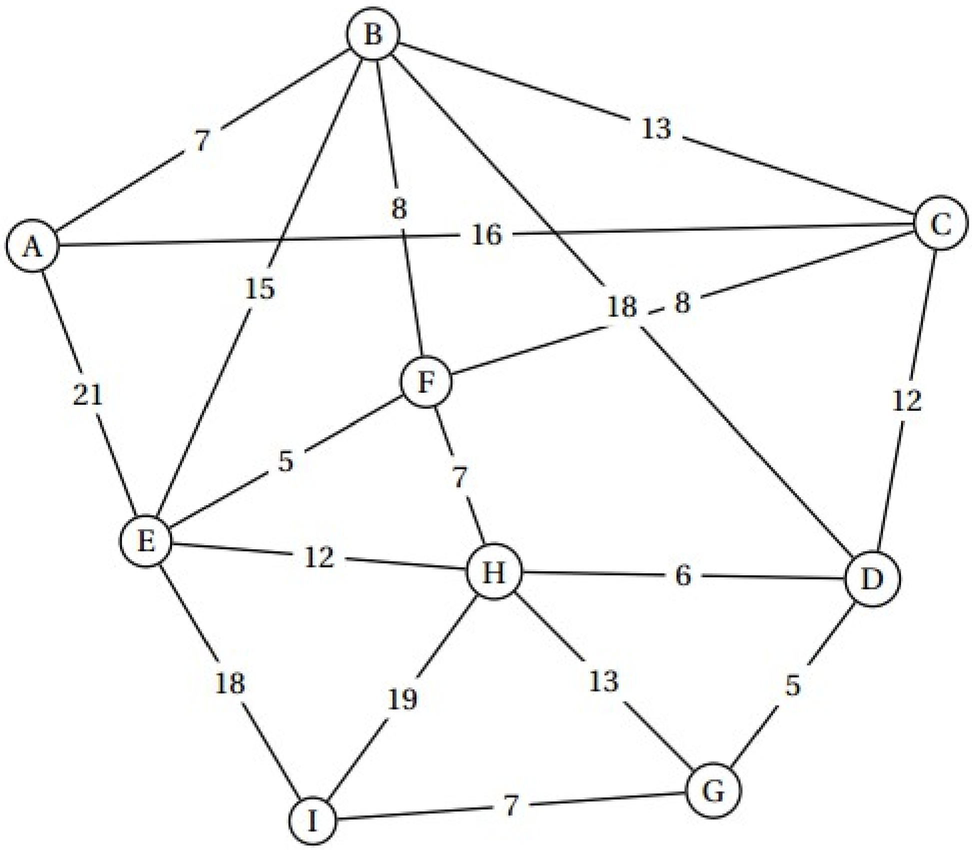
Commentaires :
Il est faux et contradictoire de dire qu'on ne peut pas dépasser 60 % …. !!!! (au départ, on a : 100 % ...)

Partie C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.

Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.
Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.

Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	On retient:
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	7 (A)	16 (A)	∞	21 (A)	∞	∞	∞	∞	B
		~~7 + 13 (B)~~ 16 (A)	25 (B)	~~7 + 15 (B)~~ 21 (A)	15 (B)	∞	∞	∞	F
		~~15 + 8 (F)~~ 16 (A)	25 (B)	20 (F)		∞	22 (F)	∞	C
			~~16+12 (C)~~ 25 (B)	20 (F)		∞	22 (F)	∞	E
			25 (B)			∞	~~20 +12 (E)~~ 22 (F)	38 (E)	H
			~~22 + 6 (H)~~ 25 (B)			35 (H)		~~22+19 (H)~~ 38 (E)	D
						30 (D)		38 (E)	G
								37 (G)	I

Le plus court trajet de A à I a une longueur qui vaut 37 (centaines de mètres), c'est le trajet:

A-B-D-G-I (On reprend dans le tableau en « remontant »: pour arriver à I, le sommet précédent était G, avant G, on arrivait de D, …. (surlignés en jaune))

Exercice 2

1) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Justifier que la matrice M est inversible.*

dét(M) = $3\times 1-5\times 1 \ = -2$

Le déterminant de M étant différent de 0, la matrice M est inversible.

Remarque : (non demandée)

$$M^{-1} = \frac{1}{\text{dét}(M)} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 2{,}5 \\ 0{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}$$

2) Soit Δ la droite d'équation y = ax + b passant par A(1 ; 2) et $B\left(\frac{3}{5};1\right)$.

a) Montrer que a et b sont solutions du système (Σ): $\begin{cases} 3a+5b=5 \\ a+b=2 \end{cases}$

Puisque A ∈ Δ, on a: 2 = $a\times 1+b$

puisque B ∈ Δ, on a: 1 = $\frac{a\times 3}{5}+b$, soit: 5 = 3a + 5b,

par conséquent, a et b sont solutions du système (Σ): $\begin{cases} 3a+5b=5 \\ a+b=2 \end{cases}$

Remarque :

On demande de dire comment les données mènent au système …

On part donc des données : A et B sont des points de Δ, et, on prouve que ces données amènent un système d'équations à deux inconnues …

b) Justifier que le système (Σ) équivaut à l'équation matricielle MX = N où X = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *et N =* $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et déterminer a et b.*

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+5b \\ a+b \end{pmatrix}$, donc l'équation $MX = N$ où N = $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ est équivalente à (Σ),

Remarque :

on demande de montrer que le calcul matriciel et le système donne les mêmes équations ...

Comme M est inversible, on en déduit: $X = M^{-1} \times N = \begin{pmatrix} -0,5 & 2,5 \\ 0,5 & -1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5+5 \\ 2,5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

Une équation de Δ est: $y = 2,5x - 0,5$