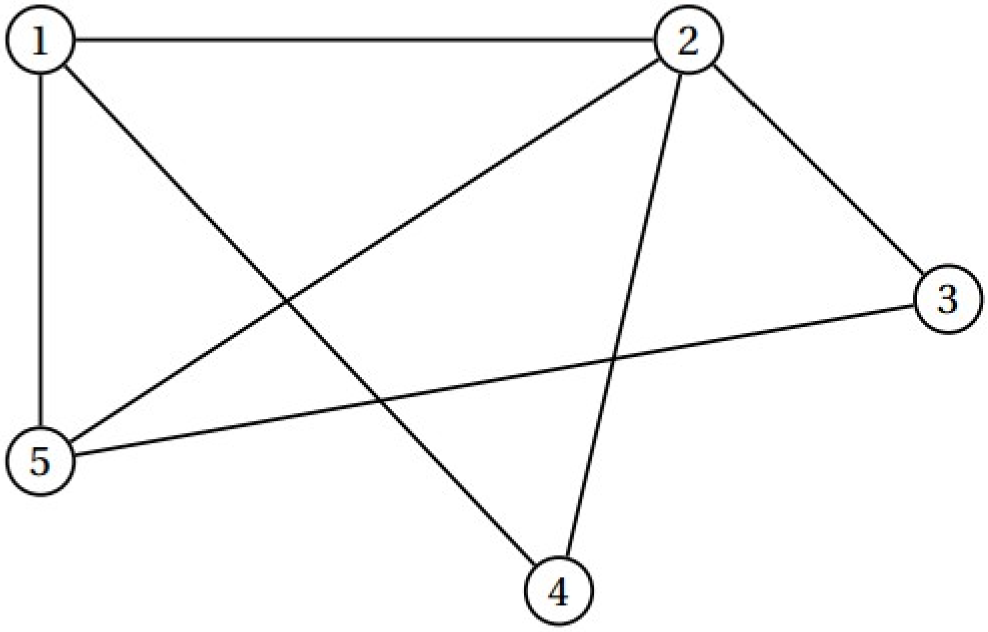
EXERCICE 2 ***5 points***

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.

Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.



1. L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.

Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.

Sommets	1	2	3	4	5
Degré	3	4	2	2	3

Comme il y a exactement deux sommets de degré impair , il existe une chaîne eulérienne qui commence et finit par chacun de ces deux sommets.

La somme des degrés est 14, il y a 7 arêtes.

1, 2, 4, 1, 5, 3, 2, 5 est un tel itinéraire complet d'accrobranches, empruntant une fois et une seule chaque parcours et commençant par l'arbre numéro 1.

2. On note M la matrice associée au graphe Γ en considérant les sommets pris dans l'ordre croissant des numéros d'arbres.

a. Écrire la matrice M.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. On donne, ci-dessous, les matrices M^2 et M^3 .

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

L'organisateur du parc de loisir souhaite organiser des « itinéraires express » qui débuteront à l'arbre numéro 1, emprunteront trois parcours d'accrobranches et finiront à l'arbre 4. Ces itinéraires peuvent éventuellement emprunter plusieurs fois le même parcours.

Déterminer, en justifiant votre résultat, le nombre « d'itinéraires express » réalisables.

(On ne demande pas de donner ces différents itinéraires)

On utilise la matrice M^3 , et son coefficient situé en première ligne quatrième colonne.

En notant $a_{i,\,j}$ les coefficients de la matrice M^3 de la ième ligne, jème colonne, on lit : $a_{1,4} = 5$.

C'est le nombre d'« itinéraires express » qui débutent à l'arbre numéro 1, empruntent trois parcours d'accrobranches et finissent à l'arbre 4.

(On peut les écrire :

1, 5 , 2 , 4 ;

1, 2 , 1 , 4 ;

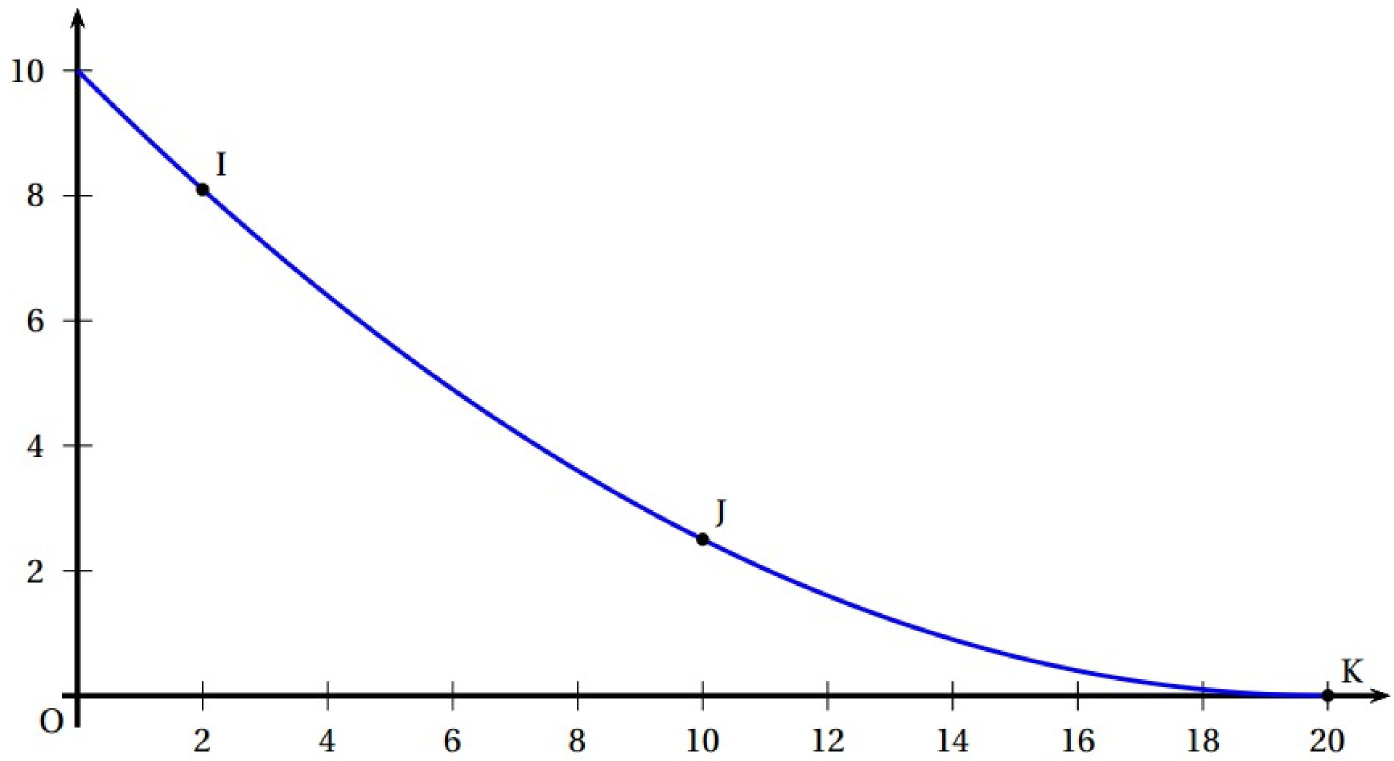
1, 5 , 1 , 4 ;

1,4 , 1 , 4 ;

1, 4 , 2 , 4 .)

3. Pour terminer ces « itinéraires express », on installe un toboggan géant sur l'arbre 4.

La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction *f* dont la courbe *C* est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Cette courbe passe par les points I, J et K de coordonnées respectives (2 ; 8,1), (10 ; 2,5) et (20 ; 0).

La fonction f est définie sur [0 ; 20] par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

a. Justifier que a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 400a+20b+c=0 \\ 100a+10b+c=2{,}5 \\ 4a+2b+c=8{,}1 \end{cases}$$

On sait : $f(2) = 8{,}1$; $f(10) = 2{,}5$ et $f(20) = 0$,

d'où, les équations suivantes :

$4a + 2b + c = 8{,}1$

$100a + 10b + c = 2{,}5$

$400a + 20b + c = 0$

Les équations devant être vérifiées en même temps, on a bien le système proposé : $\begin{cases} 400a+20b+c=0 \\ 100a+10b+c=2{,}5 \\ 4a+2b+c=8{,}1 \end{cases}$

b. Déterminer les matrices X et V pour que le système précédent soit équivalent à

$$U X = V \text{ où } U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 8{,}1 \end{pmatrix}$, le produit $UX = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400\,a+20\,b+c \\ 100\,a+10\,b+c \\ 4\,a+2\,b+c \end{pmatrix}$.

le système précédent équivaut à l'équation matricielle $UX = V$.

c. Déterminer a, b et c .

En multipliant les deux membres de l'égalité à gauche par U^{-1}, il vient :

$$X = U^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 8{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $a = \frac{1}{40}$; $b = -1$; $c = 10$

La fonction f est définie sur [0 ; 20] par : $f(x) = \frac{1}{40}x^2 - x + 10$.