Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

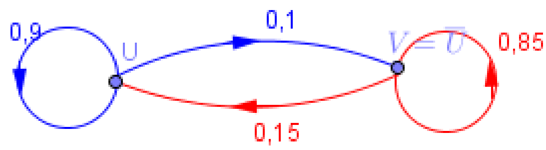
Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U. On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

- u_n *la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année* $2013+n$*, ainsi* $u_0=0{,}45$ *;*
- v_n *la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année* $2013+n$.

1. *Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.*



Remarque : la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$

2. ***Donner** v_0, calculer u_1 et v_1.*

$v_0 = 1 - u_0 = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$

$P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

$P_1 = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$

Donc, $u_1 = 0{,}45\times0{,}9 + 0{,}55\times0{,}15 = 0{,}487\,5$

et $v_1 = 1 - u_1 = 0{,}512\,5$

(Ou bien : $v_1 = 0{,}45\times0{,}1 + 0{,}55\times0{,}85 = 0{,}512\,5$)

On considère l'algorithme (incomplet) donné en annexe. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée.

Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.

Recopier sur la copie la partie " traitement " (lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V sont des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur **0,55**	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	affecter à U la valeur $0{,}9\times U+0{,}15\times V$	L7
	affecter à V la valeur **1 – U**	L8

	ou bien affecter à V la valeur **0,1×U + 0,85×V**	
	Fin Pour	L9
Sortie :	Afficher U et Afficher V	L10

3. *On admet que, pour tout nombre entier naturel* n, $u_{n+1}=0{,}75u_n+0{,}15$.

Remarque et complément :

D'après le graphe probabiliste, on sait : $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 0{,}15v_n$

Comme $v_n = 1 - u_n$, en substituant v_n par $(1 - u_n)$, il vient : $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 0{,}15\,(1 - u_n)$

$u_{n+1}=0{,}75u_n+0{,}15$

On note, pour tout nombre entier naturel n, $w_n=u_n-0{,}6$.

a. *Montrer que la suite* (w_n) *est une suite géométrique de raison* $0{,}75$.

$w_{n+1} = u_{n+1} - 0{,}6$ (par définition de la suite (w_n))

$w_{n+1} = (0{,}75u_n + 0{,}15) - 0{,}6$ (par définition de la suite (u_n))

$w_{n+1} = 0{,}75u_n - 0{,}45$ (en effectuant $0{,}15 - 0{,}6$)

$w_{n+1} = 0{,}75\left(u_n - \dfrac{0{,}45}{0{,}75}\right)$ (en factorisant 0,75)

$w_{n+1} = 0{,}75(u_n - 0{,}6) = 0{,}75w_n$ (par définition de w_n)

(w_n) est donc une suite géométrique de raison 0,75 et
de premier terme $w_0 = u_0 - 0{,}6 = 0{,}45 - 0{,}6 = -0{,}15$

Complément : On peut écrire $w_n = -0{,}15\times(0{,}75)^n$

b. *Quelle est la limite de la suite* (w_n) *? En déduire la limite de la suite* (u_n)*. Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.*

Comme $-1 < 0{,}75 < 1$, la suite géométrique (w_n) converge vers 0.

Or, $u_n = w_n + 0{,}6$

Par somme la suite (u_n) converge vers 0,6.

Interprétation : Sur le long terme, la proportion de clients pour l'entreprise U tend vers 60 %, et, celle pour l'entreprise V tend vers 40 %.

L'état stable est P = (0,6   0,4).

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 10] par :

$$C(x)=ax^3+bx^2+cx+10 \quad a,\ b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros. On admet que le triplet $(a,\ b,\ c)$ est solution du système (S).

$$(S)\ \begin{cases} a+b+c & = \ 1 \\ 27a+9b+3c & = 17{,}4 \\ 125a+25b+5c & = \ 73 \end{cases} \text{~~~et on pose } X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Remarque et complément :
Si le système n'est pas donné (ou s'il doit être justifié par une démarche), on sait dans le tableau donné au début de la partie B/ que C(1) = 11, C(3) =27,4 et C(5) =83.

On a donc : $\begin{cases} a+b+c+10=11 \\ 27a+9b+3c+10=27{,}4 \\ 125a+25b+5c+10=83 \end{cases}$

1.

a. *Écrire ce système sous la forme $MX=Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.*

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 17{,}4 \\ 73 \end{pmatrix}$

Ainsi, comme $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on a : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 27a+9+c \\ 125a+25b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 17{,}4 \\ 73 \end{pmatrix}$

Soit $MX = Y$

b. *On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet $(a,\ b,\ c)$ solution du système (S).*

M étant inversible, on sait que $MX = Y$ équivaut à $X = M^{-1}Y$

La calculatrice donne $S = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$, soit : $\begin{cases} a=0{,}5 \\ b=0{,}4 \\ c=0{,}1 \end{cases}$.

2. *En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8000 recharges d'eau produites ?*

Pour 8 000 recharges (8 milliers de recharges), le coût en centaines d'euros est C(8)

C(8) = $0{,}5\times8^3+0{,}4\times8^2+0{,}1\times8+10$ = 292,4

Conclusion : le coût annuel pour 8 000 recharges : 292,4×100 = 29 240 €.

À propos des suites arithmético-géométriques.

Soit une suite (u_n) définie par récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$

On introduit une suite auxiliaire (w_n) qui sera de la forme $w_n = u_n + c$ (Ce qui veut dire $u_n = w_n - c$)

Objectif : montre que (w_n) est une suite géométrique de raison a.

(On exprime w_{n+1} en fonction de w_n et on doit trouver : $w_{n+1} = aw_n$)

Calculs	**Commentaires**	**Illustration**
		$u_{n+1}=0{,}75u_n+0{,}15$ $\boldsymbol{a} = 0{,}75$, $b = 0{,}15$
		$\boldsymbol{w_n} = u_n - 0{,}6$, $c = -0{,}6$
$w_{n+1} = u_{n+1} + c$	Par définition de (w_n).	$\boldsymbol{w_{n+1}} = u_{n+1} - 0{,}6$
$w_{n+1} = (au_n + b) + c$	On remplace u_{n+1} par $au_n + b$ par définition de la suite (u_n)	$\boldsymbol{w_{n+1}} = 0{,}75u_n + 0{,}15 - 0{,}6$
$w_{n+1} = au_n + (b + c)$	on effectue $b + c$	$\boldsymbol{w_{n+1}} = 0{,}75u_n - 0{,}45$
$w_{n+1} = a(u_n + \frac{b+c}{a})$ $w_{n+1} = a(u_n + c)$	on factorise a, et, si le terme c est bien choisi, on a : $\frac{b+c}{a} = c$	$\boldsymbol{w_{n+1}} = 0{,}75(u_n - \frac{0{,}45}{0{,}75})$ et, $\frac{0{,}45}{0{,}75} = 0{,}6$
$w_{n+1} = aw_n$	par définition : $w_n = u_n + c$	$\boldsymbol{w_{n+1}} = 0{,}75w_n$