Enseignement de spécialité

Une société est spécialisée dans la vente en ligne de produits de haute technologie sur internet.

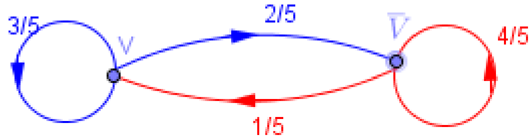
Partie A

La société réalise tout au long de l'année des journées promotionnelles pour attirer ses clients sur son site internet. Elle leur envoie un courrier électronique annonçant chaque journée de promotion. Parmi les clients, 5 % d'entre eux ont visité le site internet de la société lors de la première journée de promotion.
Une étude portant sur le comportement des clients auxquels la société a envoyé ce type de message a mis en évidence que :

- *trois clients sur cinq ayant visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visitent à nouveau lors de 1a journée promotionnelle suivante ;*
- *un client sur cinq n'ayant pas visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visite lors de la journée promotionnelle suivante.*

On choisit. au hasard, un client ayant reçu le message annonçant la première journée promotionnelle.
On formule l'hypothèse que les comportements des clients observés lors de l'étude n'évoluent pas d'une journée promotionnelle à la suivante.
Pour tout entier naturel n *non nul, on note l'état probabiliste ainsi défini par la matrice ligne* $P_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ *, où* x_n *désigne la probabilité que le client, pris au hasard, visite le site internet de la société lors de la* n*-ième journée de promotion.*

1. *Pour une journée promotionnelle donnée, on note* V*, l'évènement le client a visité le site internet lors de la journée promotionnelle .*
   Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets V *et* $\overline{V}$*.*



2. *Écrire la matrice de transition* M *de ce graphe en prenant les sommets* V *et* $\overline{V}$ *dans cet ordre.*

On cherche la matrice M telle que $P_{n+1} = P_n M$

D'après les données : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{3}{5}x_n + \frac{1}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{4}{5}y_n \end{cases}$ qui équivaut à l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix} \times M \text{ avec } M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

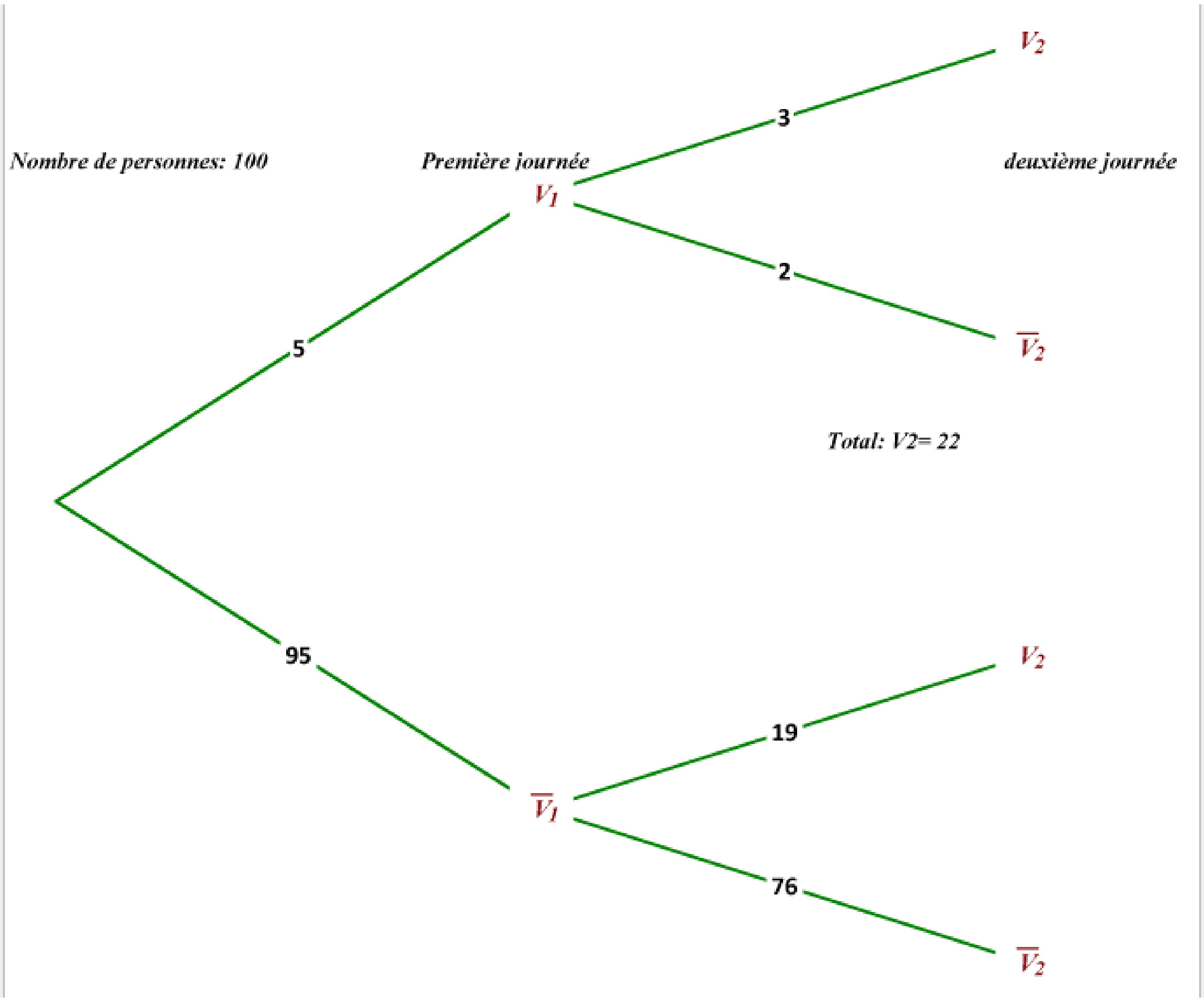
3. *En remarquant que* $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$*, déterminer* P_2*. Interpréter ce résultat.*

$$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}05\times\frac{3}{5}+0{,}95\times\frac{1}{5} & 0{,}05\times\frac{2}{5}+0{,}95\times\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}78 \end{pmatrix}$$

Lors de la deuxième journée promotionnelle, 22 % ont visité le site .
(***Remarque*** : sur 100 personnes,
5 visitent le site la première journée et 95 ne le visitent pas.
Sur les 5 personnes ayant visité le site la 1ère journée, 3 le visitent la deuxième journée.
Sur les 95 personnes n'ayant pas visité le site la 1ère journée, 19 le visitent la deuxième journée.
On a donc : (3 + 19 =) 22 personnes visitant le site la deuxième journée dont 3 seulement ont visité le site les deux fois.

Sur les 5 personnes ayant visité le site la 1ère journée, 2 ne le visitent pas la deuxième journée.
Sur les 95 personnes n'ayant pas visité le site la 1ère journée, 76 ne le visitent pas la deuxième journée.
On a donc : (2 + 76 =) 78 personnes ne visitant pas le site la deuxième journée dont 76 n'ont pas visité le site les deux fois.
Arbre de choix :)



4. *On admet que le taux de visites se stabilise à long terme. Montrer que* $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ *est un état stable de ce système.*

on a d'une part : $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ = 1 et d'autre part : $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ =

$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5} & \frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{15} & \frac{10}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Remarques :
1) On a vu la propriété suivante :
Pour tout graphe dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état probabiliste P_n converge vers un état *P* indépendant de l'état initial P_0 .
Cet état *P* vérifie l'égalité $P\times M=P$.

P est l'état stable du graphe probabiliste.

Si vous utilisez cette propriété, vous devez l'énoncer correctement et indiquer comment vous faites pour obtenir la limite des états P_n .

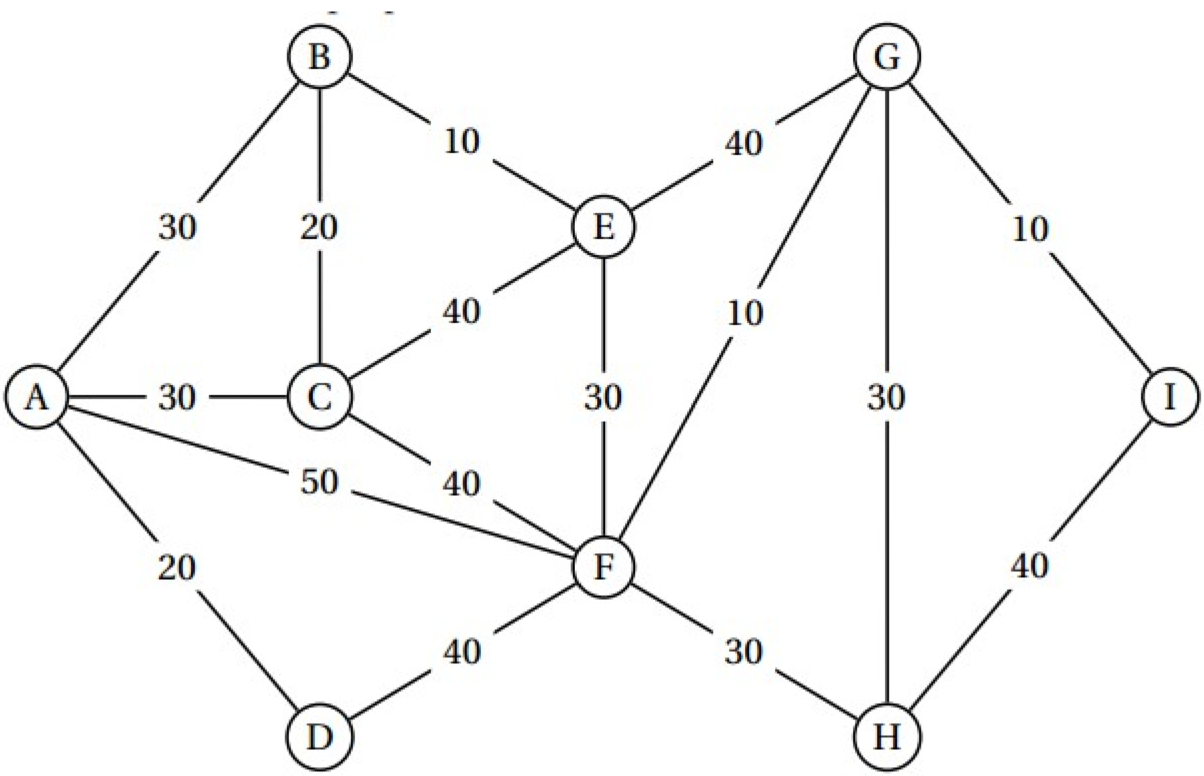
2) Ici, puisqu'on nous propose l'état stable, il suffit de vérifier la définition d'un état probabiliste stable : la somme des coefficients est 1 et P×M = P.

3) La résolution du système est une démarche correcte mais moins avantageuse ici.
Le système : $\begin{cases} x+y=1 \\ \frac{3}{5}x+\frac{1}{5}y=x \end{cases}$ qui mène à $\begin{cases} x+y=1 \\ \frac{2}{5}x-\frac{1}{5}(1-x)=0 \end{cases}$ puis $\begin{cases} x+y=1 \\ \frac{3}{5}x=\frac{1}{5} \end{cases}$

On a bien : $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

Partie B

Le réseau informatique de cette société est constitué d'un ensemble de routeurs interconnectés à l'aide de fibres optiques haut débit. Le graphe qui suit schématise l'architecture de ce réseau. Les sommets représentent les routeurs et les arêtes représentent les fibres optiques.
On a fait figurer les durées de transfert des données (en millisecondes) d'un routeur à un autre sur les fibres optiques du réseau de la société.



1. *Chaque année la société doit vérifier l'état physique de la fibre optique installée sur son réseau. Un robot inspecte toute la longueur de la fibre optique afin de s'assurer qu'elle ne présente pas de détérioration apparente.*
   Peut-il parcourir l'ensemble du réseau en suivant les fibres optiques et en empruntant chaque fibre optique une et une seule fois ? Justifier la réponse.
   Si un tel parcours est possible, préciser par quel(s) routeur(s) du réseau le robot doit commencer son inspection.

sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I
degrés	4	3	4	2	4	6	4	3	2

Parcourir en suivant les fibres optiques et en empruntant chaque fibre optique une et une seule fois est une chaîne eulérienne.

D'après le théorème d'Euler, puisqu'il existe exactement deux sommets de degré impair, il existe une chaîne eulérienne reliant les sommets B à H.
Le robot peut commencer par le sommet B et finir par le sommet H
ou commencer par le sommet H et finir par le sommet B.

2. *Un ordinateur, relié au routeur A envoie un paquet de données à un ordinateur relié au routeur I.*
   Le paquet de données a mis 70 *ms pour transiter du routeur A au routeur I. Ce paquet de données a-t-il emprunté le chemin le plus rapide sur le réseau ? Justifier la réponse.*

Algorithme de Djikstra :

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	30 (A)	30 (A)	20 (A)	∞	50 (A)	∞	∞	∞
	30 (A)	30 (A)		∞	~~20 + 40 (D)~~ 50 (A)	∞	∞	∞
		~~20+30 (B)~~ 30 (A)		40 (B)	50 (A)	∞	∞	∞
				~~30 + 40 (C)~~ 40 (B)	~~30 + 40 (C)~~ 50 (A)	∞	∞	∞
					~~40 + 30 (E)~~ 50 (A)	80 (E)	∞	∞
						60 (F)	80 (F)	∞
							~~60 + 30 (G)~~ 80 (F)	70 (G)

Le chemin le plus court : (en remontant dans la lecture de l'algorithme I-G- F- A)

A- F- G- I de durée 70 ms.