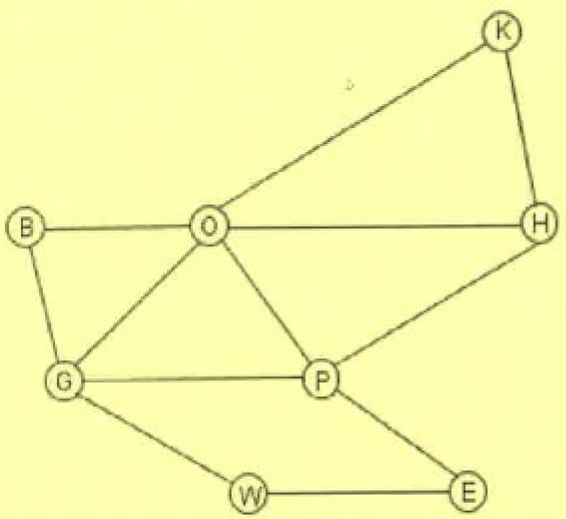
Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe Γ dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations.
Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.



Légende :

B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1) a) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est connexe.
b) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est complet.

1 a) Le graphe est connexe.

Aucun sommet n'est isolé.

La chaîne B-G-O-K-H-P-E-W relie tous les sommets.

b) Le graphe n'est pas complet.

Deux sommets au moins ne sont pas adjacents, par exemple : B et K ne sont pas reliés par une arête.

2) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.

Le graphe étant connexe, d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de de gré impair est 0 ou 2.

Lorsque deux sommets sont de degré impair, les sommets sont les deux extrémités de la chaîne eulérienne.

Sommet	B	E	G	H	K	O	P	W
Degré	2	2	4	3	2	5	4	2

Il existe donc une chaîne eulérienne partant de H (resp. O) et arrivant à O (resp. H).

La somme des degrés est 24, le graphe Γ possède donc 12 arêtes.

Par exemple : H-P-E-W-G-B-O-G-P-O-K-H-O est une chaîne eulérienne.

3) Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

La matrice d'adjacence est une matrice carrée d'ordre 8 , en mettant dans l'ordre alphabétique, on obtient :

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} B & E & G & H & K & O & P & W \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} B \\ E \\ G \\ H \\ K \\ O \\ P \\ W \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Remarque : Le graphe n'étant pas orienté, la matrice est symétrique par rapport à sa grande diagonale qui ne contient que des 0 puisqu'il n'y a pas de boucle :

$$M = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

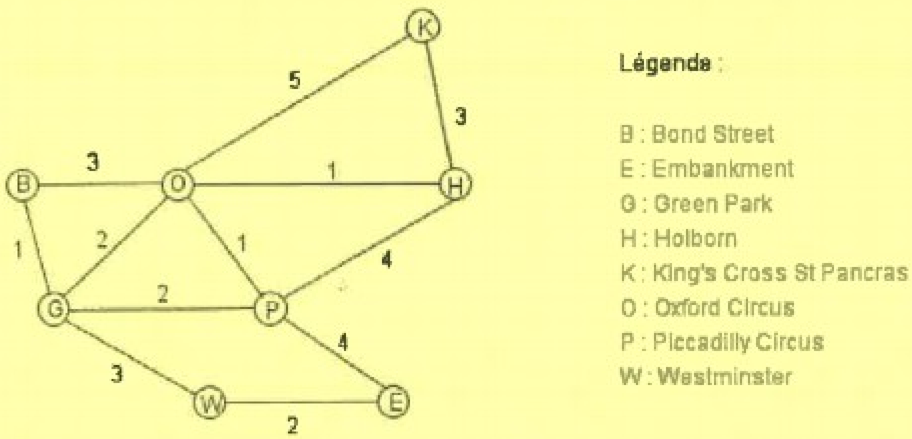
Pour la suite de l'exercice, on donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix}
2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\
6 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 10 & 6 \\
4 & 1 & 4 & 4 & 5 & 8 & 8 & 3 \\
2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 \\
7 & 3 & 9 & 8 & 7 & 8 & 10 & 3 \\
3 & 6 & 10 & 8 & 3 & 10 & 4 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0
\end{pmatrix}$.

4) Un touriste se trouve à la station Holborn. Il prévoit de se rendre à la station Green Park en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.

a) Sans utiliser le graphe, donner le nombre de trajets possibles et justifier la réponse.

b) Donner les trajets possibles.

4 a) Un coefficient a_{ij} de la matrice M^3 donne le nombre de trajet comportant 3 lignes de la station n° *i* à la station n° *j*.
Holborn représenté par H est à la 4ième ligne, et, Green Park représenté par G est à la 3ième ligne.
Le coefficient $a_{4,3}$ de M^3 vaut : 4.
le nombre de trajets possibles est donc 4
b) Ces trajets sont : H-K-O-G ; H-O-B-G ; H-O-P-G ; H-P-O-G



Sur le graphe pondéré ci-dessus, on a indiqué la durée, exprimée en minutes, des trajets entre chaque station (la durée est indiquée sur chaque arête du graphe Γ).

5) À partir de la station Westminster, ce touriste doit rejoindre la station King's Cross St Pancras le plus rapidement possible pour prendre un train.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet permettant de relier la station Westminster à la station King's Cross St Pancras en une durée minimale. On précisera cette durée.

Algorithme de Djikstra :

On part de Westminster (W) pour King's Cross St Pancras (K)

W	B	E	G	H	O	P	K	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	W
	∞	2 (W)	3 (W)	∞	∞	∞	∞	E
	∞		3 (W)	∞	∞	6 (E)	∞	G
	4 (G)			∞	5 (G)	5 (G)	∞	B
				∞	~~4+3 (B)~~ 5 (G)	5 (G)	∞	O
				6 (O)		~~5+1 (O)~~ 5 (G)	10 (O)	P
				~~5+4 (P)~~ 6 (O)			10 (O)	H
							9 (H)	K

Le trajet de durée minimale est : W-G-O-H-K et il dure 9 minutes (3 + 2 + 1 + 3)