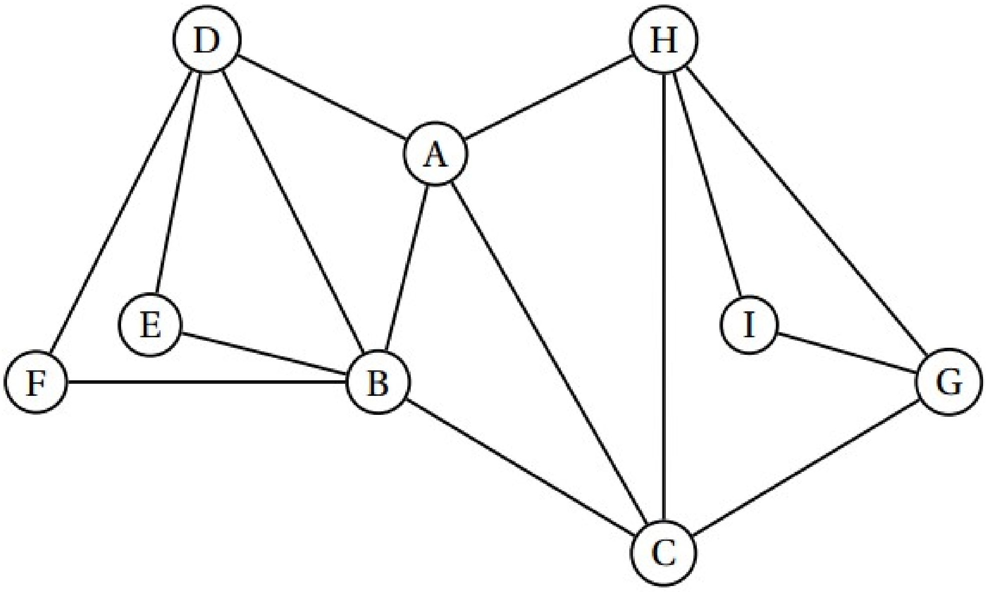
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Partie A : Étude d'un graphe

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous.



1.

a. *Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ est complet.*
Le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas complet car il existe au moins deux sommets qui ne sont pas reliés par une arête (sommets non adjacents : par exemple A et G)

b. *Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ est connexe.*
Le graphe $\mathcal{G}$ est connexe car il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques du graphe.

2. a. *Donner le degré de chacun des sommets du graphe $\mathcal{G}$.*

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I
degrés	4	5	4	4	2	2	3	4	2

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes partant de ce sommet .

b. Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ admet un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne.

Un **cycle eulérien** est une chaîne **partant d'un sommet et revenant à ce sommet** en parcourant **toutes les arêtes une et une seule fois.**
D'après le théorème d'Euler, un tel cycle existe si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.
Le graphe $\mathcal{G}$ n'admet pas de cycle eulérien, car, les sommets ne sont pas tous de degré pair.

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne **partant d'un sommet et aboutissant à un autre sommet** en parcourant **toutes les arêtes une et une seule fois.**
D'après le théorème d'Euler, une telle chaîne existe si et seulement si deux et deux seulement sommets sont de degré impair.
La chaîne joint alors ces deux sommets de degré impair.
Le graphe $\mathcal{G}$ admet une chaîne eulérienne car il existe exactement deux sommets de degré impair.
Cette chaîne part d'un des sommets de degré impair (B ou G) et aboutit à l'autre sommet (G ou B) de degré impair.

Une chaîne eulérienne possible : B – F – D – B – E – D – A – B – C – A – H – C – G – I – H – G

3.

a. *Donner la matrice M associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b. *On donne :* $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Montrer, par le calcul, que le coefficient de la septième ligne et quatrième colonne de la matrice M^3 est égal à 3.

Comme $M^3 = M^2 \times M$

Pour obtenir le coefficient de la septième ligne et quatrième colonne, on multiplie la septième ligne de M^2 par la quatrième colonne de *M*.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

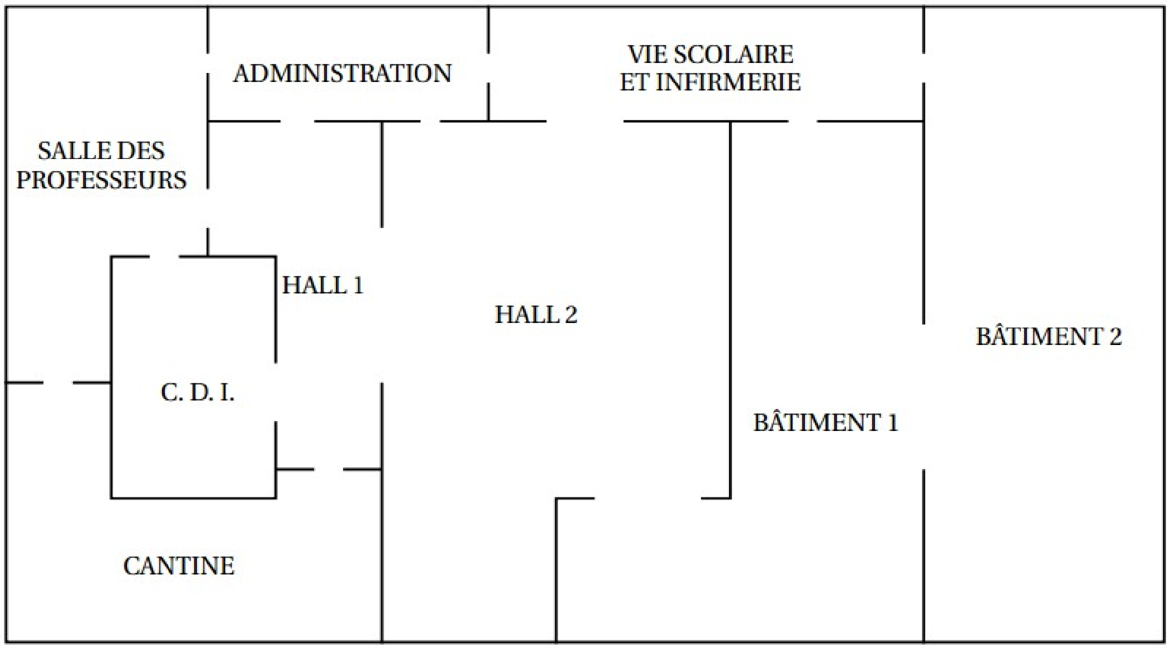
$2\times1 + 1\times1 + 1\times0 + 0\times0 + 0\times1 + 3\times0 + 2\times0 + 1\times0 = 3$

Remarque : On peut aussi faire $M^3 = M \times M^2$ et multiplier la septième ligne de *M* par la quatrième colonne de M^2.

Partie B : Applications

Dans cette partie, on pourra justifier les réponses en s'aidant de la partie A

On donne ci-dessous le plan simplifié d'un lycée



1. *Le graphe $\mathcal{G}$ donné en partie A modélise cette situation.*
   Recopier et compléter le tableau suivant :
   Le degré de chaque sommet est le nombre de portes du lieu.

Lieu dans le lycée	SP	adm	VS	CDI	H1	H2	B1	B2	C
Nombre de portes	4	4	4	2	5	4	3	2	2

Hall 1 est le point B, et, Bâtiment 1 est le point G.
Hall1 communique avec SP, Hall2, CDI, adm, cantine
Bât 1 communique avec Hall2, VS et Bât2
B est adjacent à A, C, D, E et G est adjacent à C, H, I.
Hall2 est donc le sommet C. (seul sommet adjacent à B et à G)

Hall 2 communique de plus à adm, VS
C est adjacent de plus à A, H, donc, A est l'administration et H est la vie scolaire.

Adm communique en plus avec la salle des professeurs et A est adjacent à D, D est la salle des professeurs
On finit de même avec le CDI en E, la cantine en F et le bâtiment 2 en I

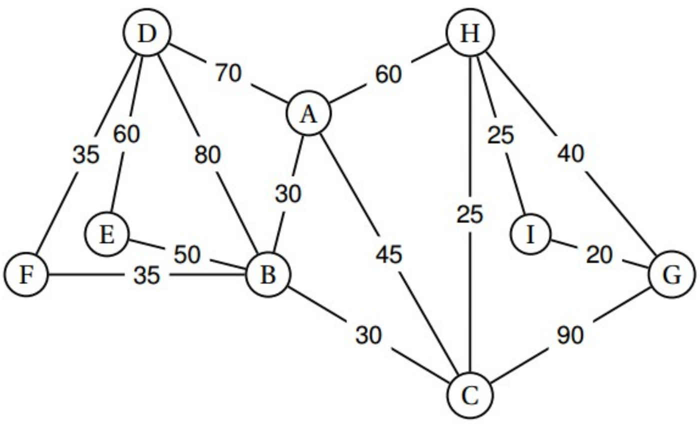
Sommet du graphe $\mathcal{G}$	A	B	C	D	E	F	G	H	I
degré	4	5	4	4	2	2	3	4	2
Nombre de portes	4	5	4	4	2	2	3	4	2
Lieu correspondant dans le lycée	Adm	Hall 1	Hall2	salle profs	CDI	cantine	Bât 1	Vie sc	Bât 2

2. *Un élève a cours de mathématiques dans le bâtiment 1. À la fin du cours, il doit rejoindre la salle des professeurs pour un rendez vous avec ses parents. Déterminer le nombre de chemins en trois étapes permettant à l'élève de rejoindre ses parents puis indiquer quels sont ces chemins*.
   Le lieu « BÂTIMENT 1 » correspond au septième sommet G, et le lieu « salle des

professeurs » correspond au quatrième sommet D.
On cherche le nombre de chemins de longueur 3. Ce nombre est donné par le coefficient $a_{7,4}$ de la matrice M^3.
Or, d'après la partie A-3.b/ ce nombre est égal à 3.
Il y a donc trois chemins de longueur 3 reliant le bâtiment 1 à la salle des professeurs. Ce sont les chemins :
G – H – A – D : BÂTIMENT 1 VIE SCOLAIRE ADMINISTRATION SALLE DES PROFESSEURS
G – C – A – D : BÂTIMENT 1 HALL 2 ADMINISTRATION SALLE DES PROFESSEURS
G – C – B – D : BÂTIMENT 1 HALL 2 HALL 1 SALLE DES PROFESSEURS

3. *Le lycée organise une journée portes-ouvertes.*
   a. *Déterminer, en justifiant, s'il est possible de visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux*.
   D'après la partie A, il existe une chaîne eulérienne qui permet d'emprunter une et une seule fois chaque passage.
   Il faut partir du Hall 1 vers le bâtiment 1, ou, partir du bâtiment 1 vers le hall 1.

   b. *Sur les arêtes du graphe $\mathcal{G}$ sont indiqués les temps de parcours exprimés en seconde entre deux endroits du lycée.*



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet G au sommet D en un temps minimal. Déterminer ce temps minimal, exprimé en seconde.

Algorithme de Djikstra

Nom des sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Le départ G est affecté de 0, les autres de ∞.	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞
les sommets adjacents à G … G est traité. On prend I...	∞	∞	90 (G)	∞	∞	∞		40 (G)	20 (G)
… de poids minimal. Sommets adjacents à I. I est traité. On prend H ...	∞	∞	90 (G)	∞	∞	∞		~~20 + 25 (I)~~ 40 (G)	
... de poids minimal. Sommets adjacents à H. H est traité. On prend C ...	100 (H)	∞	65 (H)	∞	∞	∞			
... de poids minimal. Sommets adjacents à C. C est traité. On prend B	~~65 + 45 (C)~~ 100 (H)	95 (C)		∞	∞	∞			
... de poids minimal. Sommets adjacents à B. B est traité. On prend A...	95 + 30 (B) 100 (H)			175 (B)	145 (B)	130 (B)			
... de poids minimal. Sommets adjacents à A. A est traité. On prend F				170 (A)	145 (B)	130 (B)			
... de poids minimal. Sommets adjacents à F. F est traité. On prend E				165 (F)	145 (B)				
... de poids minimal. Sommets adjacents à E. E est traité.				~~145 + 60 (E)~~ 165 (F)					

Tous les sommets sont traités …
La chaîne la plus courte a pour poids 165 secondes
c'est la chaîne G-H-C-B-F-D