Index

1 page 20......1
12 page 20......1
15 page 20......1
38 page 21......2
54 page 23......2
59 page 23......3
72 page 24......3
77 page 25......4
78 page 25 Vrai-Faux......4
79 page 25 Vrai-Faux......5
81 page 25......5
82 page 25......6
83 page 25......6
84- 85- 86 page 25. Vrai-Faux......6
102 page 28 matrice de Léontief......7
Sujet A page 31......8
N°110 de la fiche......10

1 page 20

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2 (ou de format 2×2).

$a_{1,1} = 3,\ a_{1,2} = 5,\ a_{2,1} = 2,\ a_{2,2} = 11$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice de format 2×3.

$a_{1,1} = 4,\ a_{1,2} = 1,\ a_{1,3} = 2,\ a_{2,1} = 0,\ a_{2,2} = 1,\ a_{2,3} = 3$

12 page 20

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

15 page 20

$k = 2$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

$k = 2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $2B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

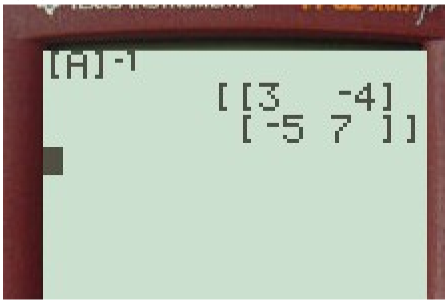
38 page 21

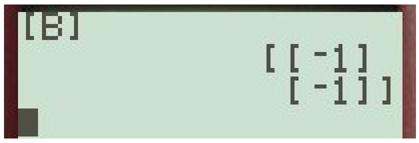
(S) : $\begin{cases} 7x+4y=-1 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$

1) A = $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

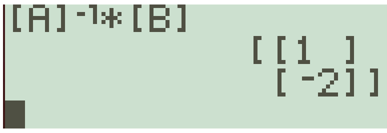
L'écriture matricielle du système est AX = B.

2 a) La matrice A est inversible car dét(A) = 7×3 – 5×4 = 1 est différent de 0.





b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$



X = A^{-1} B = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Le système (S) a pour solutions x = 1 et y = –2

54 page 23

1)

	A (paquet d'un kg)	B (paquet d'un kg)	C (paquet d'un kg)
Arabica (en kg)	0,7	0,5	0,8
Robusta (en kg)	0,3	0,5	0,2

M = $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

2) Fabrication :

Nombre de paquets A	25
Nombre de paquets B	40
Nombre de paquets C	35

La matrice de fabrication X = $\begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 35 \end{pmatrix}$

$$MX = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7\times 25+05\times 40+0{,}8\times 35 \\ 0{,}3\times 25+0{,}5\times 40+0{,}2\times 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65{,}5 \\ 34{,}5 \end{pmatrix}$$

Pour fabriquer, ce jour-là, 25 paquets A, 40 paquets B et 35 paquets C, il faut 65,5 kg d'arabica et 34,5 kg de robusta.

3) Le stock en début de journée : S = $\begin{pmatrix} 150 \\ 100 \end{pmatrix}$

Le stock en fin de journée : $S_{fin} = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 65{,}5 \\ 34{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150-65{,}5 \\ 100-34{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84{,}5 \\ 65{,}5 \end{pmatrix}$

---

59 page 23

Produit de matrices

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Calcul de AB	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1\times2+1\times1+0\times0 & 1\times0+1\times3+0\times(-1) & 1\times1+1\times0+0\times4 \\ 0\times2+(-1)\times1+4\times0 & 0\times0+(-1)\times3+4\times(-1) & 0\times1+(-1)\times0+4\times4 \\ 3\times2+0\times1+2\times0 & 3\times0+0\times3+2\times(-1) & 3\times1+0\times0+2\times4 \end{pmatrix}$	AB = $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & -7 & 16 \\ 6 & -2 & 11 \end{pmatrix}$

Calcul de BA	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\times1+0\times0+1\times3 & 2\times1+0\times(-1)+1\times0 & 2\times0+0\times4+1\times2 \\ 1\times1+3\times0+0\times3 & 1\times1+3\times(-1)+0\times0 & 1\times0+3\times4+0\times2 \\ 0\times1+(-1)\times0+4\times3 & 0\times1+(-1)\times(-1)+4\times0 & 0\times0+(-1)\times4+4\times2 \end{pmatrix}$	BA = $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 12 \\ 12 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

---

72 page 24

Rappel : Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Pour une matrice carrée $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2, le déterminant est le nombre $ad - bc$.

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ est inversible puisque dét(A) =6×(–5) – (–4)×7 = –30 + 28 = –2.

2) Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on cherche $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc le système : $\begin{cases} 6a-4c=1 \\ 6b-4d=0 \\ 7a-5c=0 \\ 7b-5d=1 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \end{pmatrix}$,

qu'on peut décomposer en deux systèmes : $\begin{cases} 6a-4c=1 \\ 7a-5c=0 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L3 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} 6b-4d=0 \\ 7b-5d=1 \end{cases} \begin{pmatrix} L2 \\ L4 \end{pmatrix}$.

De (L3), on tire : $c = \frac{7}{5}a$, en injectant dans (L1), il vient : $6a - 4\times\frac{7}{5}a = 1$, soit : $\frac{2}{5}a = 1$. $a = \frac{5}{2}$.

Comme $c = \frac{7}{5}a$, on a : $c = \frac{7}{5}\times\frac{5}{2} = \frac{7}{2}$.

De (L2), on tire : $d = \frac{3}{2}b$, puis dans (L4) : $7b - 5\times\frac{3}{2}b = 1$, soit : $\frac{-1}{2}b = 1$. $b = -2$.

Comme $d = \frac{3}{2}b$, on a : $d = \frac{3}{2}\times(-2) = -3$

La matrice $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 \\ \frac{7}{2} & -3 \end{pmatrix}$.

La matrice inverse de A est $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 \\ \frac{7}{2} & -3 \end{pmatrix}$.

---

77 page 25

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

2) Comme $A\times A^3 = A^3\times A = A^4 = I_3$,

la matrice A est inversible et son inverse $A^{-1} = A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3) Comme $A^2\times A^2 = A^4 = I_3$, la matrice A^2 est inversible et son inverse est elle-même.

---

78 page 25 Vrai-Faux

A est une matrice carré d'ordre 3 telle que $A^3 = I_3$.

La matrice A est inversible car $A\times A^2 = A^2\times A = A^3 = I_3$.

La matrice inverse de A est A^2.

79 page 25 Vrai-Faux

La matrice $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $6\times5-3\times10=0$.

Le déterminant est nul.

81 page 25

a) (S) $\begin{cases} 2x+9y=30 \\ 5x+2y=-7 \end{cases}$

Méthode par substitution :

De l'équation 1, on tire : $x = \dfrac{30-9y}{2}$ et on remplace (substitue) dans l'équation 2 :

$5\times\left(\dfrac{30-9y}{2}\right) + 2y = -7$ afin d'avoir une seule inconnue.

On développe, réduit et " isole " y.

$\dfrac{150-45y+4y}{2} = -7$, soit : $-41y = -14-150$

$y = \dfrac{164}{41} = 4$.

$x = \dfrac{30-9\times4}{2} = -3$.

Vérification :

$2\times(-3)+9\times4 = -6+36 = 30$ et $5\times(-3)+2\times4 = -15+8 = -7$

(S) a pour solution le couple $(-3\ ;\ 4)$

b) (S) : $\begin{cases} 2x-5y+3z=1 \\ -x+y-2z=-5 \\ x+2y-z=2 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$

Par combinaison linéaire :

On cherche des coefficients de façon à " éliminer " par une somme algébrique entre une ligne et successivement les deux autres une des inconnues.

Par exemple : $2\times L1 + 3\times L2$ et $L1 + 3\times L3$ mène à :

$\begin{cases} 2x-5y+3z=1 \\ x-7y=-13 \\ 5x+y=7 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$ En faisant maintenant $L2 + 7\times L3$, on aura :

$\begin{cases} 2x-5y+3z=1 \\ x-7y=-13 \\ 36x=36 \end{cases}$, on en déduit successivement en remontant : $x = 1$; $y = \dfrac{13+1}{7} = 2$ et $z = \dfrac{1-2+10}{3} = 3$

(S) a pour solution le triplet $(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$

82 page 25

$f(x) = ax^2 + bx + c$.
C_f passe par $A(1 ; 2)$, donc $f(1) = 2$, soit : $a + b + c = 2$
par $B(4 ; 11)$, donc $f(4) = 11$, soit : $16a + 4b + c = 11$
par $C(-1 ; 2)$, donc $f(-1) = 6$, soit : $a - b + c = 6$
Les réels a, b, *c sont donc les solutions du système :*

$$(S) : \begin{cases} a+b+c=2 \\ 16a+4b+c=11 \\ a-b+c=6 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$$

En faisant L2 – L1 et L1 – L3,

$$(S) \text{ équivaut à } \begin{cases} a+b+c=2 \\ 15a+3b=9 \\ 2b=-4 \end{cases}$$

Il vient immédiatement : $b = -2$; $a = \dfrac{9+6}{15} = 1$ et $c = 2 - 1 + 2 = 3$.

$f(x) = x^2 - 2x + 3$
Vérification en calculant $f(1)$, $f(4)$ et $f(-1)$

---

83 page 25

D'après les données, on a pour x appareils (L), y appareils (C) et z appareils (V) :

besoin en acier (masse en kg) : $10x + 4y + 10z$

besoin en peinture (masse en kg) : $2x + y + z$

besoin en heures (durée en h) : $10x + 6y + 12z$

Si 4 200 kg d'acier, 800 kg de peinture et 5 000 heures de travail ont été nécessaires, le nombre $(x ; y ; z)$ d'appareils fabriqués est solution du système : $\begin{cases} 10x+4y+10z=4200 \\ 2x+y+z=800 \\ 10x+6y+12z=5000 \end{cases}$

qui est équivalent à l'équation matricielle : $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 12 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4200 \\ 800 \\ 5000 \end{pmatrix}$.

Si A est inversible, la solution est donnée par la matrice $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$.

On a fabriqué 200 appareils (L), 300 appareils (C) et 100 appareils (V) .

84- 85- 86 page 25. Vrai-Faux

On considère le système (S) : $\begin{cases} 5x+2y=1 \\ 3x-y=5 \end{cases}$

(S) a une solution unique car en écrivant l'équation matricielle associée AX = B,

on a dét(A) = $5\times(-1) - 2\times3 = -11$. Le déterminant est non nul, la matrice est inversible, le système a une seule solution.

Si on pose AX = B avec X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors A = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (et non $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$) et B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

et la solution est donnée par la matrice A^{-1} B.

Remarque : En posant X = $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, on aurait le système XA = B avec A = $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}$.

et la solution serait donnée par la matrice BA^{-1}.

---

102 page 28 ***matrice de Léontief***

Une économie compte trois secteurs de production X, Y, Z

Rappel :

L'offre (production) est égale à la somme des demandes (consommation interne et consommation externe)

Le tableau donne comme indications :

La consommation (demande) interne d'unités de X est : 0,3 unités de X, 0,4 unités de Y et 0,1 unités de Z (première ligne du tableau).

On a donc : $0{,}3x + 0{,}4y + 0{,}1z$ pour la demande interne qui ajoutée à celle des consommateurs (ici : 11 unités) doit être égale à la production de x unités de X.

D'où, $x = 11 + 0{,}3x + 0{,}4y + 0{,}1z$.

La deuxième ligne du tableau donne la consommation interne d'unités de Y et la demande des consommateurs est de 20 unités de Y.

$y = 20 + 0{,}5x + 0{,}2y + 0{,}6z$

La troisième ligne donne la consommation interne d'unités de Z et la demande des consommateurs est de 42 unités de Z.

$z = 42 + 0{,}1x + 0{,}3y + 0{,}1z$

d'où le système (S) : (S) : $\begin{cases} x = 11 + 0{,}3\,x + 0{,}4\,y + 0{,}1\,z \\ y = 20 + 0{,}5\,x + 0{,}2\,y + 0{,}6\,z \\ z = 42 + 0{,}1\,x + 0{,}3\,y + 0{,}1\,z \end{cases}$

2) On pose A = $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et C = $\begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 42 \end{pmatrix}$.

Calcul de AX + C :

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3\,x + 0{,}4\,y + 0{,}1\,z + 11 \\ 0{,}5\,x + 0{,}2\,y + 0{,}6\,z + 20 \\ 0{,}1\,x + 0{,}3\,y + 0{,}1\,z + 42 \end{pmatrix}$$

X = AX + C est donc équivalent à $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3\,x+0,4\,y+0,1\,z+11 \\ 0,5\,x+0,2\,y+0,6\,z+20 \\ 0,1\,x+0,3\,y+0,1\,z+42 \end{pmatrix}$

qui est équivalent à $\begin{cases} x=11+0,3\,x+0,4\,y+0,1\,z \\ y=20+0,5\,x+0,2\,y+0,6\,z \\ z=42+0,1\,x+0,3\,y+0,1\,z \end{cases}$

3) Comme $I_3 \times X = X$, l'équation matricielle X = AX + C est équivalente à $I_3 \times X - A \times X = C$

Après factorisation à gauche de X, on obtient :

l'équation matricielle X = AX + C est équivalente à $(I_3 - A)X = C$

4) Calcul de la matrice $B = I_3 - A = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,4 & -0,1 \\ -0,5 & 0,8 & -0,6 \\ -0,1 & -0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = (I_3 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{540}{151} & \frac{390}{151} & \frac{320}{151} \\ \frac{510}{151} & \frac{620}{151} & \frac{470}{151} \\ \frac{230}{151} & \frac{250}{151} & \frac{360}{151} \end{pmatrix}$

5) les quantités produites sont données par la matrice $X = B^{-1}C = \begin{pmatrix} 180 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix}$.

180 unités de X, 250 unités de Y et 150 unités de Z.

Observations dans le tableau

Production totale de Consommation de par	X 180 unités	Y 250 unités	Z 150 unités	consommation externe	consommation totale (demande)
X	0,3×180 = 54	0,4×250 = 100	0,1×150 = 15	11	54+100+15+11 = 180
Y	0,5×180 = 90	0,2×250 = 50	0,6×150 = 90	20	90+50+90+20= 250
Z	0,1×180 = 18	0,3×250 = 75	0,1×150 = 15	42	18+75+15+42 = 150

Sujet A page 31

Deux tableaux exprimant le nombre et les caractéristiques d'articles fabriqués par une usine,

a_1	a_2	a_3

m_1	m_2	m_3	

3	9	5	m_1
4	0	9	m_2
4	8	6	m_3

5	6	3	Masse (kg)
180	250	150	Coûts (€)

A = $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ et M = $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 180 & 250 & 150 \end{pmatrix}$

1/ Une semaine donnée, l'usine doit fournir 8 articles a_1, 12 articles a_2 et 13 articles a_3, d'où, la matrice F = $\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$ qui représente la fabrication cette semaine-là.

a) le produit A×F = $\begin{pmatrix} 3\times8+9\times12+5\times13 \\ 4\times8+0\times12+9\times13 \\ 4\times8+8\times12+6\times13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 197 \\ 149 \\ 206 \end{pmatrix}$ représente le nombre de modules m_1, m_2, m_3.

Pour fournir 8 articles a_1, 12 articles a_2 et 13 articles a_3, il faut 197 modules m_1, 149 m_2 et 206 m_3.

b) la demande peut être satisfaite puisqu'il y a 210 modules de chaque sorte en stock.

197 ⩽ 210, 149 ⩽ 210 et 206 ⩽ 210.

2. Une autre semaine la production a demandé 174 modules m_1, 121 modules m_2 et 182 modules m_3.

On a fabriqué respectivement x, y, z articles a_1, a_2, a_3.

On obtient avec ces données le système $\begin{cases} 3x+9y+5z=174 \\ 4x+0y+9z=121 \\ 4x+8y+6z=182 \end{cases}$.

On cherche donc une matrice X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que AX = B avec B = $\begin{pmatrix} 174 \\ 121 \\ 182 \end{pmatrix}$.

Si A est inversible, la matrice de fabrication est S = A^{-1} B.

La calculatrice donne S = A^{-1} B = $\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$.

On a donc fabriqué respectivement 10 ; 11 et 9 articles a_1, a_2 et a_3.

3.a) Le produit M×A = $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 180 & 250 & 150 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 69 & 97 \\ 2140 & 2820 & 4050 \end{pmatrix}$

La première ligne donne des nombres exprimés en kg.

On a multiplié la masse des modules par le nombre respectif de modules pour chaque article.

Les coefficients de la première ligne sont les masses des articles a_1, a_2 et a_3.

La première ligne donne des nombres exprimés en €.
On a multiplié le coût des modules par le nombre respectif de modules pour chaque article.
Les coefficients de la deuxième ligne sont les coûts de ces articles a_1, a_2 et a_3.

b) L'usine fabrique x articles a_1, y articles a_2 et z articles a_3.
Le nombre d'articles fabriqués est $x + y + z$.

En multipliant les masses trouvées au 3a) pour chaque article par le nombre d'articles, on a :
Leur masse totale (en kg) est $51x + 69y + 97z$.

En multipliant les coûts trouvés au 3a) pour chaque article par le nombre d'articles, on a :
Leur coût total (en euros) est $2\,140x + 2\,820y + 4\,050z$.

c) Le nombre total d'articles étant de 27 unités, la masse totale de 1 935 kg et le coût total de 80 410 €,

on obtient le système : $\begin{cases} x+y+z=27 \\ 51x+69y+97z=1935 \\ 2\,140x+2820y+4\,050z=80410 \end{cases}$ qui est équivalent à l'équation matricielle AX = B

avec A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 51 & 69 & 97 \\ 2140 & 2820 & 4050 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 27 \\ 1935 \\ 80410 \end{pmatrix}$

La solution est donc N = A^{-1} B.

La calculatrice donne N = A^{-1} B = $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, soit : 10 articles a_1, 8 articles a_2 et 9 articles a_3.

N°110 de la fiche

A = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$M_0 = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AM_0 = \begin{pmatrix} 3\times(-5)+5\times1 & 3\times(-5)+5\times0 \\ -1\times(-5)+(-2)\times1 & -1\times(-5)+(-2)\times0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$M_0A = \begin{pmatrix} -5\times3-5\times(-1) & -5\times5-5\times(-2) \\ 1\times3+0\times(-1) & 1\times5+0\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

On a bien : $AM_0 = M_0 A$

2) Pour montrer une équivalence : (P) ⇔ (Q), on montre deux implications : (P) ⇒ (Q) et (Q) ⇒ (P)

a) Montrons (Q) ⇒ (P)

On sait : (Q).

Soit : il existe deux réels α et β tels que M = $\alpha M_0 + \beta I_2$

Objectif : il s'agit de prouver l'égalité AM = MA.

Pour cela, on calcule séparément les deux produits ….

Calcul de AM :

AM = $A(\alpha M_0 + \beta I_2) = \alpha AM_0 + \beta AI_2$ (distributivité à gauche de la multiplication sur l'addition)

Comme $AI_2 = I_2 A = A$ (I_2 est l'élément neutre de la maultiplication)), on a :

AM = $\alpha AM_0 + \beta A$

Calcul de MA :

MA = $(\alpha M_0 + \beta I_2) A = \alpha M_0 A + \beta I_2 A$ (distributivité à droite de la multiplication sur l'addition)

MA = $\alpha M_0 A + \beta A$

Or, on sait que $AM_0 = M_0 A$, d'où, AM = $\alpha AM_0 + \beta A = \alpha M_0 A + \beta A$ = MA

Conclusion : on a (P) : AM = MA

l'implication (Q) ⇒ (P) est démontrée.

b) Montrons (P) ⇒ (Q)

On sait : (P).

Soit : AM = MA avec A = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Objectif : il s'agit de trouver deux réels α et β tels que M = $\alpha AM_0 + \beta AI_2$ (M_0 est la matrice du 1/)

Pour cela, on pose M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on calcule MA et AM, on compare et …. (on verra bien)

MA = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b & 5a-2d \\ 3c-d & 5c-2d \end{pmatrix}$

AM = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+5c & 3b+5d \\ -a-2c & -b-2d \end{pmatrix}$

Comme MA = AM, on a : $\begin{cases} 3a-b=3a+5c \\ 5a-2d=3b+5d \\ 3c-d=-a-2c \\ 5c-2d=-b-2d \end{cases}$ (Système Σ)

N'oublions pas l'objectif …. déterminer α et β tels que M = $\alpha M_0+\beta I_2$ **= α** $\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **+ β** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -5\alpha+\beta & -5\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

idée : Si on pose α = c et β = d.

On va donc traiter ce système (Σ) en exprimant *a* et *b* en fonction de *c* et *d*.

$\begin{cases} 3a-b=3a+5c \\ 5a-2d=3b+5d \\ 3c-d=-a-2c \\ 5c-2d=-b-2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5c \\ 5a-3b=3d \\ a=-5c+d \\ b=-5c \end{cases}$

M = $\begin{pmatrix} -5c+d & -5c \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5c & -5c \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Conclusion :On a donc trouvé deux réels α = *c* et β = *d* tels que M = $\alpha AM_0+\beta AI_2$ (Q)

L'implication (P) ⇒ (Q) est démontrée