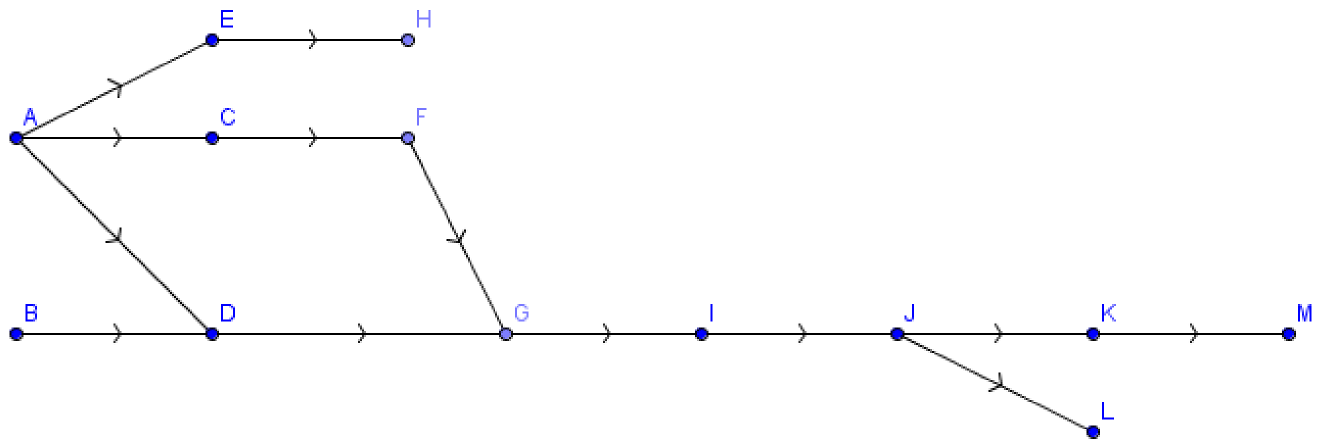
Index

Problème 3 page 37

Le fait de mettre sous forme d'un graphe permet d'analyser les tâches qui peuvent être effectuées indépendamment des autres.



On peut faire en même temps les tâches A et B.

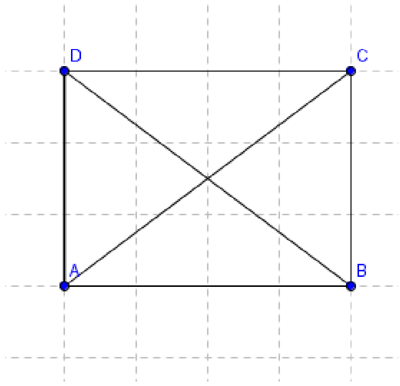
Une fois ces tâches effectuées, on peut faire les tâches C, D et E en même temps.

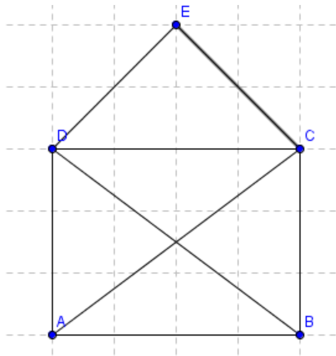
Il reste les tâches F et H qui peuvent être effectuées indépendamment dès que C et E sont effectuées,

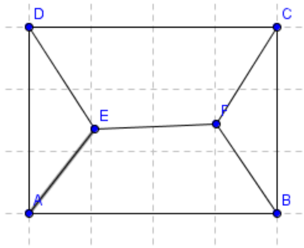
ainsi que les tâches K et L dès que la tâche J est effectuée.

Regroupement des tâches :

Problème 5







1 a)

Graphe 1/ Graphe complet d'ordre 4

Sommets	**A**	**B**	**C**	**D**
Degré	3	3	3	3

Il n'existe pas de chaînes permettant de parcourir le graphe en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête.

Graphe 2/ Graphe complet d'ordre 5

Sommets	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Degré	3	3	4	4	2

Il existe au moins une chaîne permettant de parcourir le graphe en passant une seule fois sur chaque arête.

ACDABCEDB

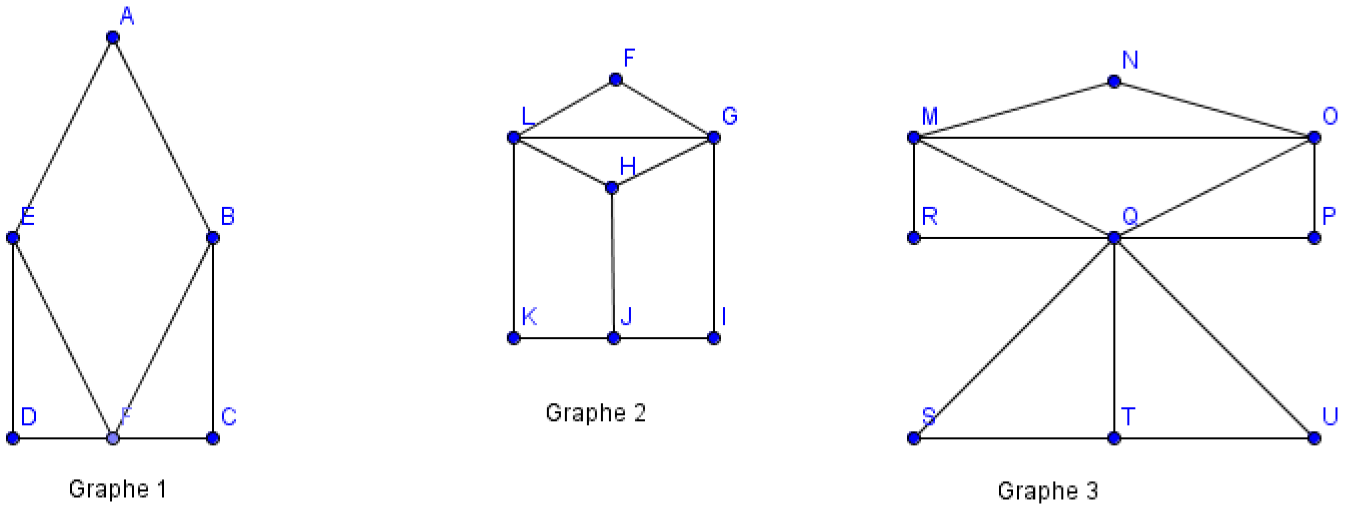
Graphe 3/ Graphe complet d'ordre 6

Sommets	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Degré	3	3	3	3	3	3

Il n'existe pas de chaînes permettant de parcourir le graphe en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête.

b) Conjecture : Lorsqu'il y a plus de deux sommets de degré impair, on ne peut pas trouver une chaîne ne passant qu'une seule fois sur chaque arête.

2. Des chaînes possibles pour chacun des graphes :



Graphe 1) E – A – B – F – E – D – F – C – B.

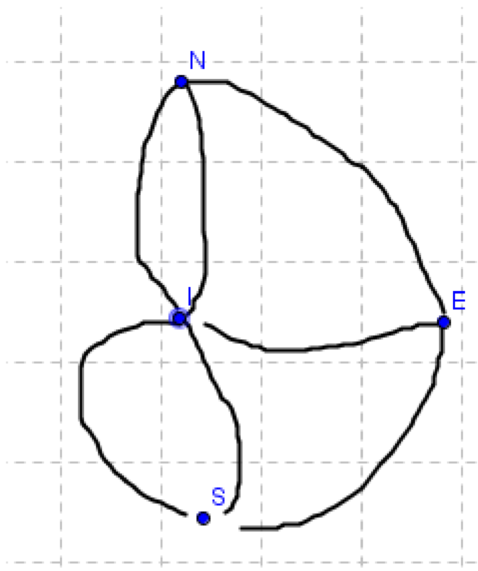
Graphe 2) H – G – F – L – K – J – I – G – L – H – J.

Graphe 3) Q – O – N – M – Q – P – O – M – R – Q – S – T – U – Q – T

Problème 7

Les arêtes sont les ponts.

On peut distinguer quatre quartiers : quartier Nord, quartier Sud, quartier Est et une Île.



Graphe complet d'ordre 4

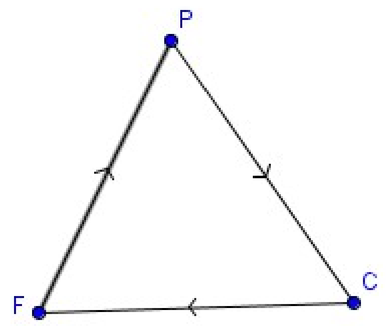
Sommets	**N**	**S**	**E**	**I**
Degré	3	3	3	5

Il n'existe pas de chaînes permettant de parcourir le graphe en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête, puisque 4 sommets sont de degré impair.

---

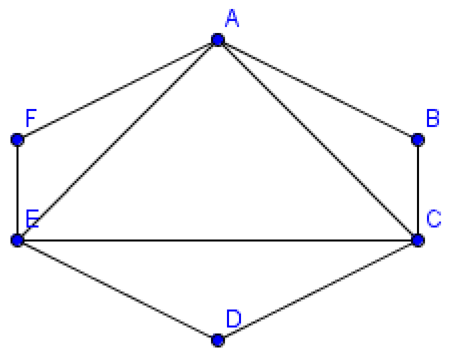
15 page 51

Jeu " Pierre-Feuille-Ciseaux " est représenté par le graphe orienté suivant (la flèche signifie " … bat … "



31 page 52

Sous-graphe stable :



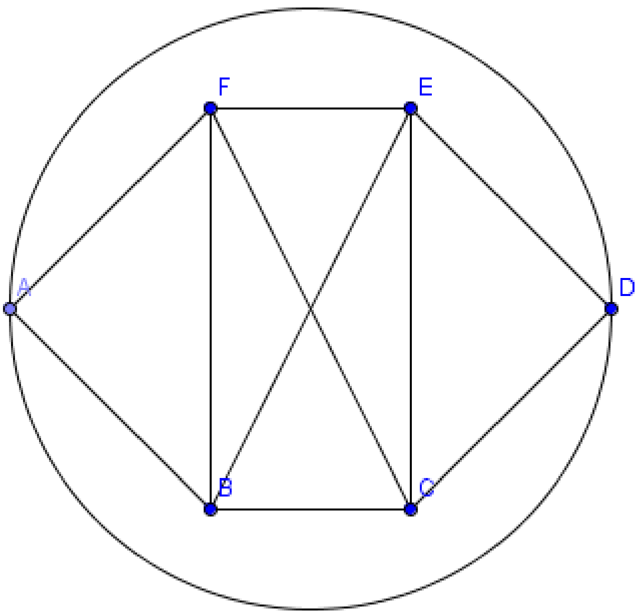
A et D ne sont pas reliés

B, D et F ne sont pas reliés.

Le sous-graphe stable d'ordre maximal est constitué des sommets B, D, F.

---

40 page 53



Ce graphe est un graphe complet d'ordre 6

Graphe complet d'ordre 6

Sommets	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Degré	4	4	4	4	4	4

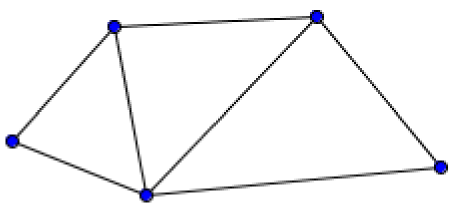
Tous les sommets sont de degré pair .

Il est possible d'établir un cycle eulérien.

Exemple : A-B-F-A-D-E-F-C-E-B-C-D-A

TP1 page 58 graphes planaires

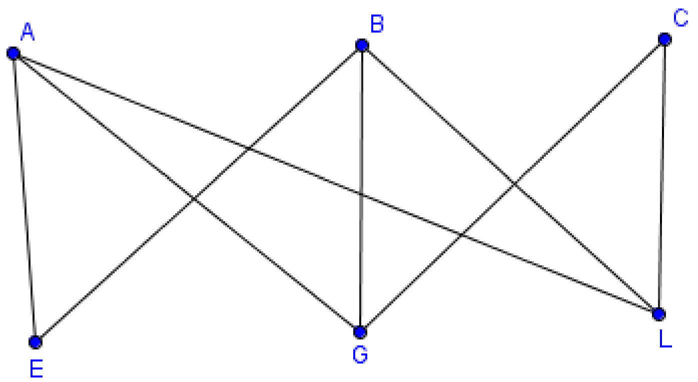
Un graphe planaire est un graphe pouvant être représenté sans qu'aucune arête n'en coupe une autre.



Ce graphe (non complet) est un graphe planaire.

A- Exemples de graphes planaires.

1) A, B, C sont trois maisons sur des parcelles contiguës et E, G, L représentent l'eau , le gaz et l'éLectricité.



2) On ne peut pas faire un graphe planaire

3) ce graphe est un graphe biparti :

On a le sous-ensemble {A, B, C} et le sous-ensemble {E, G, L}

tels que chaque arête relie ait exactement une extrémité dans chaque sous-ensemble :

A-E, A-G, A-L, B-E, B-G, B-L, C-E, C-G, C-L

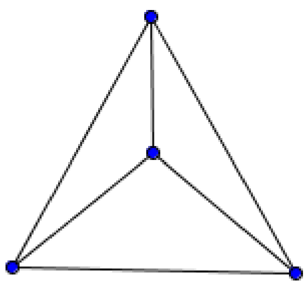
On le note $K_{3,3}$.

(il n' y a pas d'arêtes A-B ou A-C ou E-G, …)

Ce graphe n'est pas complet : A et B ne sont pas reliés

Rappel : un graphe est complet lorsque tous ces sommets sont adjacents.

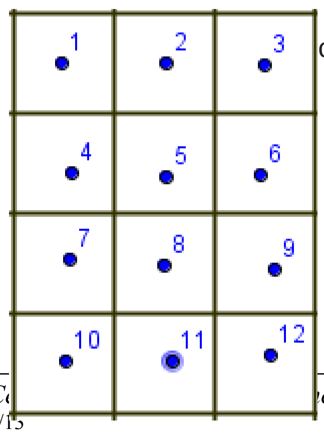
4- K_4 graphe complet d'ordre 4 (4 sommets et tous les sommets sont reliés par une arête)



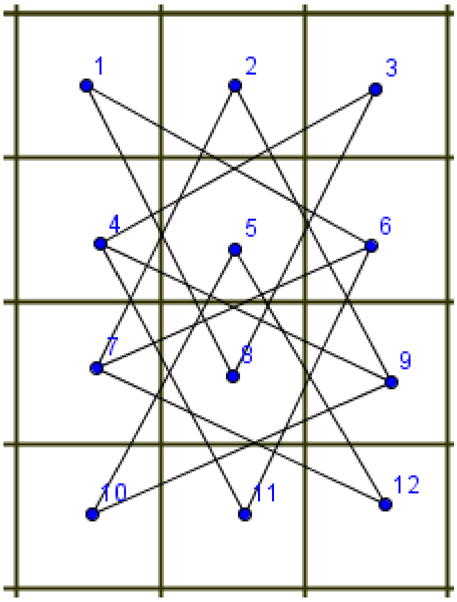
Ce graphe est planaire.

5- K_5 graphe complet d'ordre 5 n'est pas planaire.

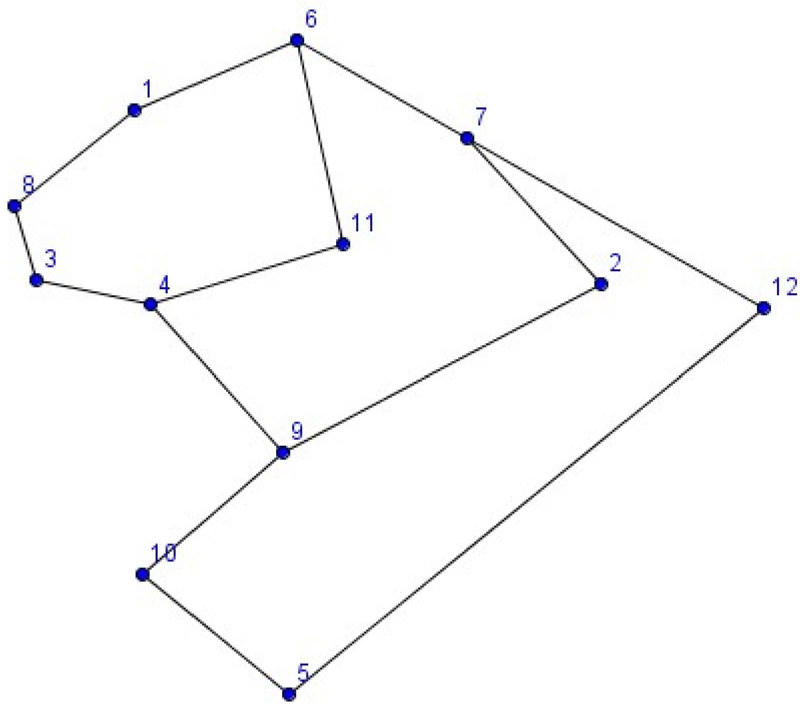
B- Le problème du cavalier

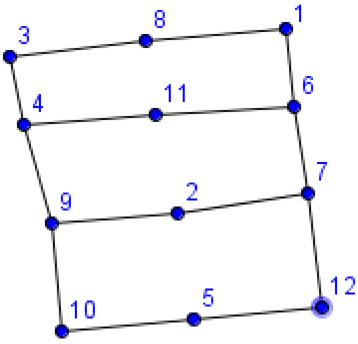


Le cavalier se déplace en **L**, c'est-à-dire de deux cases dans une direction suivies d'une case dans la direction perpendiculaire.



2) Ce graphe est planaire





3) Un chemin : 1 – 8 – 3 – 4 – 11 – 6 – 7 – 2 – 9 – 10 – 5 – 12

C- Notion de mineur dans un graphe

La notion de mineur d'un graphe est un concept de théorie des graphes. Il a été défini et étudié par Robertson et Seymour dans une série d'articles intitulée *Graph minors* (I à XXIII), publiée dans le *Journal of Combinatorial Theory* entre 1983 et 2011

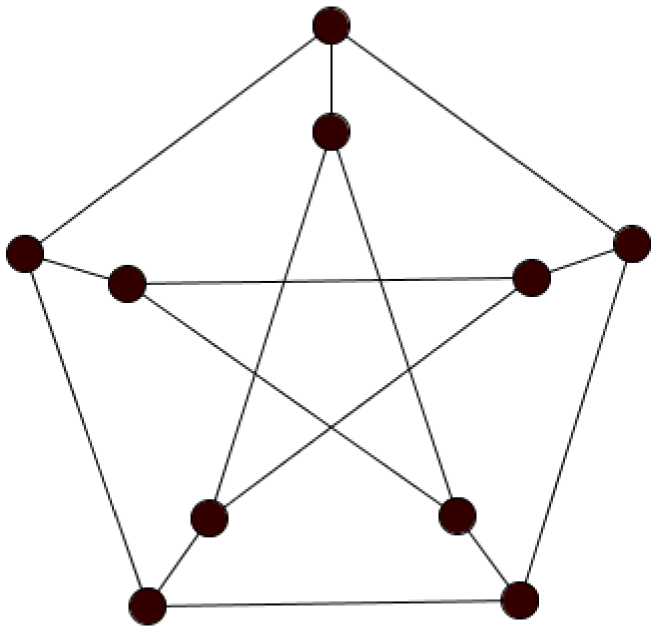
Définition

Un graphe H est un mineur du graphe fini et non orienté G s'il peut être obtenu en contractant des arêtes d'un sous-graphe de G.

En d'autres termes, H peut être obtenu à partir de G en effectuant un nombre quelconque d'opérations parmi les suivantes :

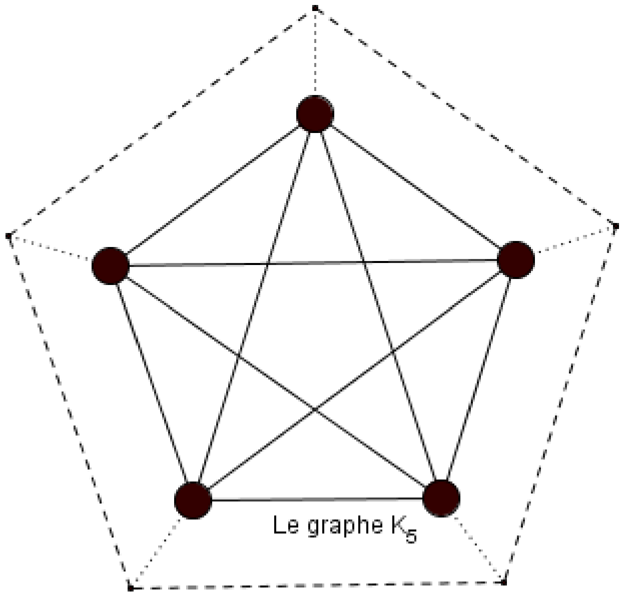
- Suppression d'une arête [A,B] : on supprime l'arête [A,B], mais ses extrémités restent inchangées.

- Contraction d'une arête [A,B] : on supprime l'arête [A,B], les deux sommets A et B sont fusionnés en un sommet C. Toute arête issue de A ou issue de B est remplacée par une nouvelle arête issue de C.



Le graphe de Petersen

Pour obtenir K_5 graphe complet d'ordre 5, il suffit de **fusionner** les sommets extérieurs avec les sommets intérieurs qui leur sont reliés.



En pointillés fins, les arêtes supprimés.

En pointillés " longs " les arêtes des anciens sommets sont déplacés

D- Caractérisation de Kuratowski- Wagner

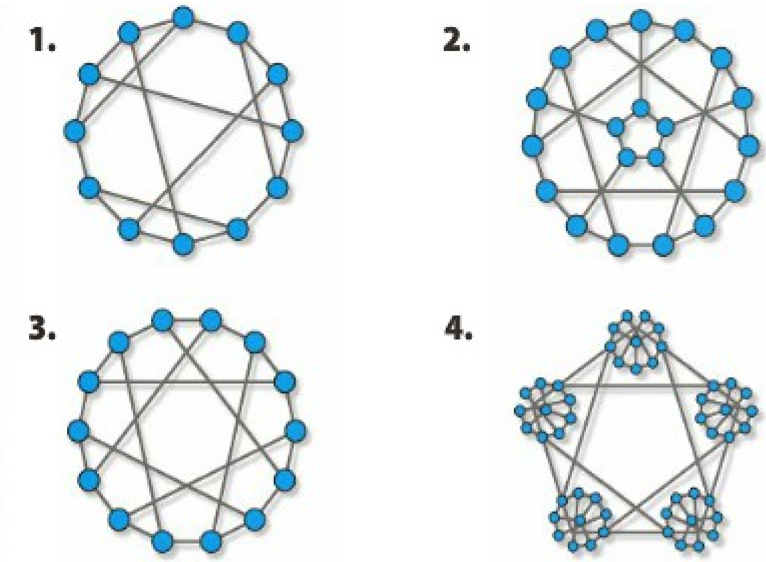
Le mathématicien polonais Kazimierz Kuratowski a établi en 1930 la caractérisation suivante des graphes planaires :

Un graphe fini est planaire si et seulement s'il ne contient pas de sous-graphe qui est une expansion de K5 (la clique à 5 sommets) ou K3,3 (le graphe complet biparti à 3+3 sommets).

L'expansion (ou subdivision) d'un graphe est le résultat de l'ajout d'un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes (par exemple, transformation de l'arête •——• en •—•—•).

Quelques années plus tard le mathématicien allemand Klaus Wagner en donna une caractérisation semblable :

Un graphe fini est planaire si et seulement s'il ne compte pas K5 ou K3,3 parmi ses mineurs.

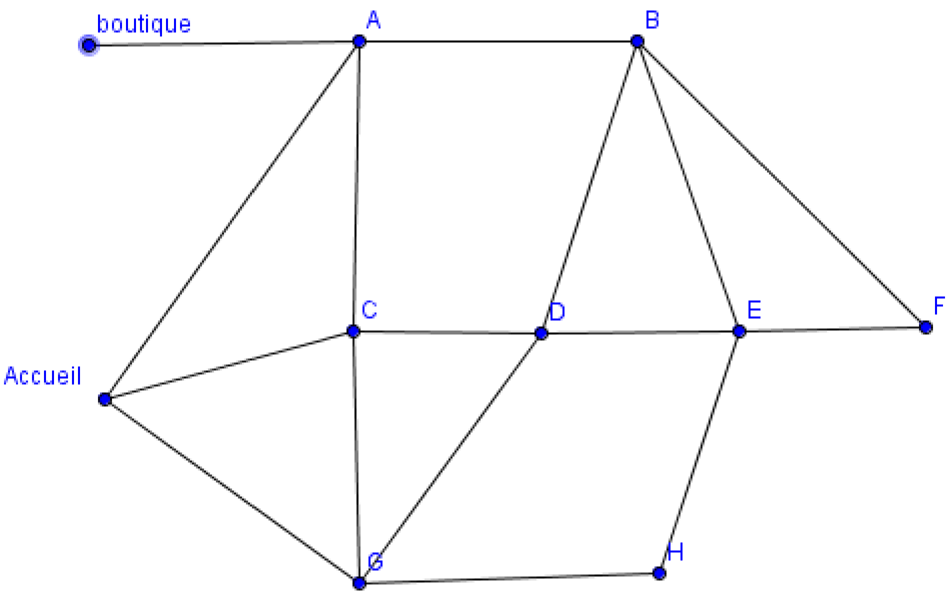


1. $K_{3,3}$ est un mineur de ce graphe.
2. K_5 est un mineur de ce graphe.
3. $K_{3,3}$ est un mineur de ce graphe.
4. K_5 est un mineur de ce graphe.

---

44 page 53

D'après le plan du musée, on obtient le graphe suivant où les sommets sont les salles et les arêtes les portes :



C'est un graphe complet d'ordre 10

Sommets	**Accueil**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**boutique**
Degré	3	4	4	4	4	4	2	4	2	1

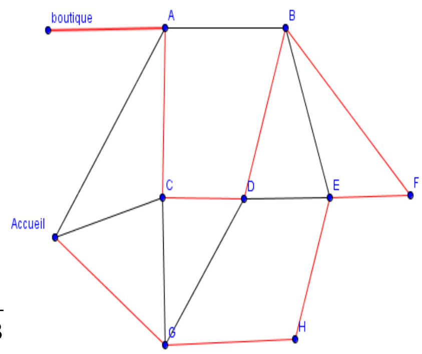
On peut faire une chaîne eulérienne (on passe une et une seule fois par chaque porte, mais, par par chaque salle : comme chez IKEA !), car, il y a exactement deux sommets de degré impair, l'accueil et la boutique (et ça tombe bien!).

En entrant par l'accueil, on poursuit par les salles : G-H-E-F-B-E-D-B-A-C-D-G-C-Accueil-A et on sort par la boutique.

Méthode : Algorithme d'Euler.

On commence par une chaîne telle que chaque arête est parcourue une seule fois joignant les deux sommets de degré impair

Étape 1 : Accueil- G-H-E-F-B-D-C-A-boutique (Marquer les arêtes parcourues)

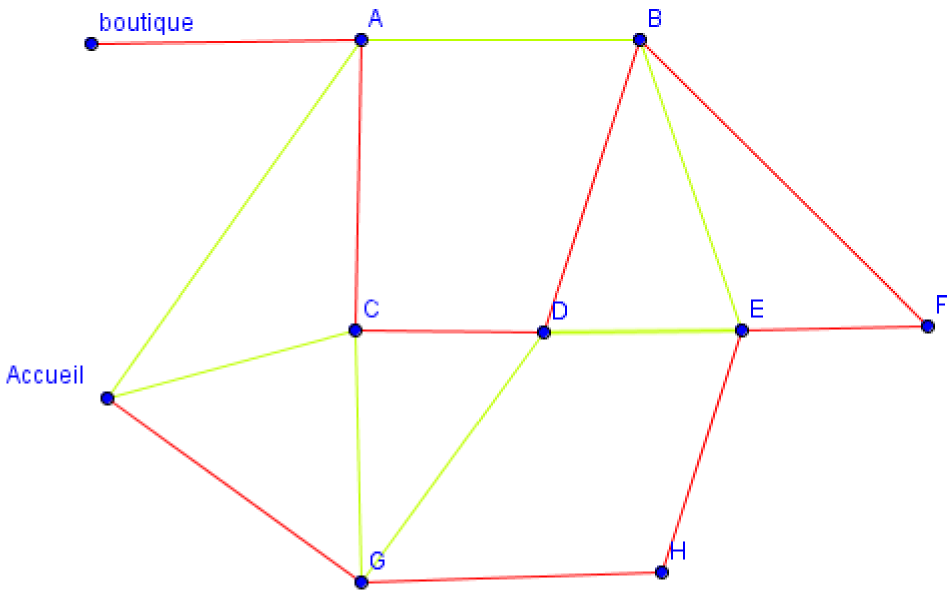


Étape 2 : à partir d'un sommet de cette chaîne, on insert un cycle qui n'utilise aucune des arêtes déjà marquées..

C'est possible car tous les sommets autres que l'accueil et la boutique sont de degré pair.

Par exemple : E-B-A-Accueil-C-B-D-E,

on obtient la chaîne : Accueil- G-H-E-B-A-Accueil-C-B-D-E-F-B-D-C-A-boutique

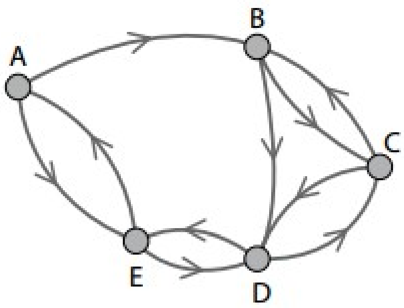


Toutes les arêtes étant marquées, on a obtenu une chaîne eulérienne.

---

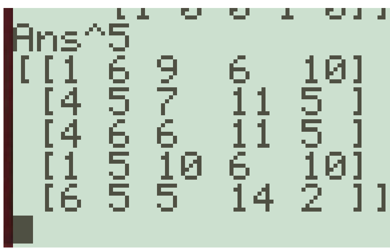
60 page 55

1)



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Calcul de M^5 à la calculatrice :



3) le nombre de chemins de longueur 5 de D à B est obtenu en lisant le coefficient de la ligne 4, colonne 2 :

Il y a donc 5 chemins de longueur 5

D – E – A – B – C – B,

D – C – B – D – C – B,

D – E – D – E – A – B,

D – E – A – E – A – B

D – C – D – E – A – B

4) À la ligne 1 de la matrice M^5, le coefficient de la première colonne est 1 et c'est le seul coefficient de la ligne 1 qui vaut 1.

C'est donc bien un cycle de A à A : A- B- C- D- E- A

5) De B à B, il y a 5 cycles (intersection de la deuxième ligne et de la deuxième colonne)

B-D-C-B-C-B

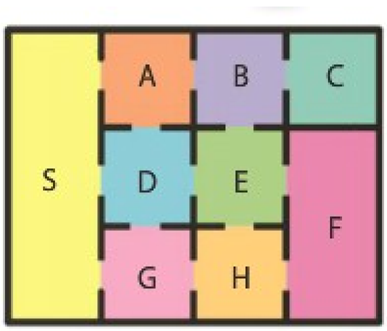
B-D-E-D-C-B

B-C-D-E-A-B

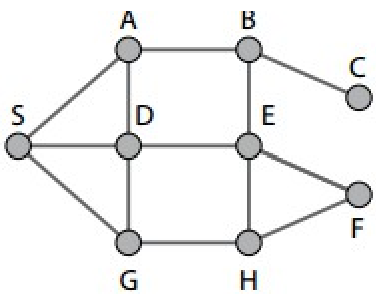
B-D-C-D-C-B

B-C-B-D-C-B

Sujet A page 63



1) Graphe modélisant la situation : une arête représente une porte de communication entre deux salles ;



2)

Sommet	S	A	B	C	D	E	F	G	H
degré	3	3	3	1	4	4	2	3	3

Dans ce graphe connexe il y a plus de deux sommets de degré impair :

le théorème d'Euler ne s'applique pas et on ne peut trouver de chaîne eulérienne.

On ne peut donc pas visiter le musée en ne passant qu'une seule fois chaque porte.

3) Le graphe n'étant pas orienté, la matrice M d'adjacence est nécessairement symétrique.

4) Un coefficient a_{ij} de la matrice M^4 donne le nombre de chemins de longueur 4 du sommet n°i au sommet n°j.

a) Les sommets étant ordonnés comme dans le tableau, D est le 5ème sommet.

Le nombre de chemins en quatre étapes (de longueur 4) partant de D et arrivant à D est le coefficient à l'intersection de la 5ème ligne et de la 5ème colonne, soit : 31 (Coefficient $a_{5,5}$ de la matrice M^5)

b) .Le nombre de chemins en quatre étapes (de longueur 4) partant de S et arrivant à C est le coefficient à l'intersection de la 1ère ligne et de la 4ème colonne, soit : 2 (Coefficient $a_{1,4}$ de la matrice M^5)

c) Dans la matrice M^4 , le coefficient $a_{4,3} = 0$. (ou bien le coefficient $a_{3,4} = 0$) (Matrice symétrique)

On ne peut pas aller de la salle C à la salle B en quatre étapes.