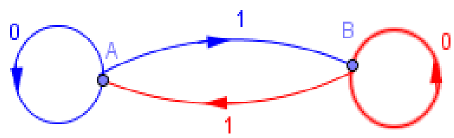
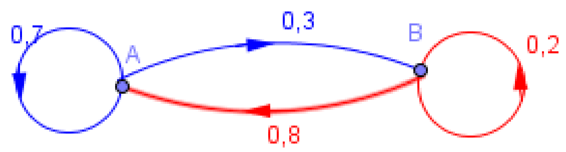
Index

11 page 79

a) 

b) 

OUI :

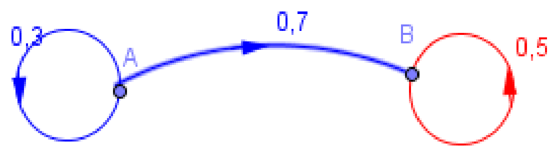
Somme des poids des arêtes issues de A : 0+ 1 = 1

Somme des poids des arêtes issues de B : 0+ 1 = 1

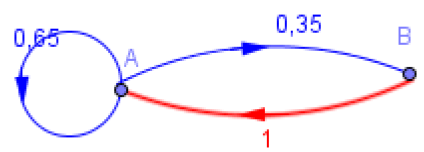
OUI :

Somme des poids des arêtes issues de A : 0,7+ 0,3 = 1

Somme des poids des arêtes issues de B : 0,2+ 0,8 = 1

c) 

Non : Somme des poids des arêtes issues de B : 0,5

d) 

OUI

somme des poids des arêtes issues de A : 0,65+ 0,35 = 1

Somme des poids des arêtes issues de B : 1

---

15 page 79

a) $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ Non, la somme des coefficients de chaque ligne n'est pas égale à 1

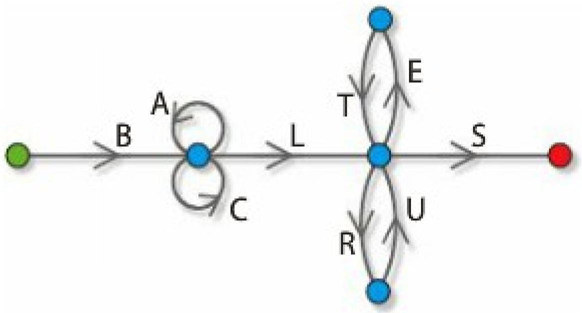
b) M = $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ Oui, la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1

c) M = $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ Non, la somme des coefficients de chaque ligne n'est pas égale à 1

d) M = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ Oui, la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1

---

31 page 80



Rappel : un mot est une liste de lettres commençant par B et finissant par S associée à une chaîne du graphe ci-dessus.

Le mot le plus court est BLS.

Ce graphe orienté et étiqueté comporte 6 sommets. (Voir à la question 3, l'écriture de la matrice d'adjacence)

1) BACCALETS est un mot reconnu par le graphe.

BLEUS n'est pas reconnu.

(Quelques remarques : si le mot contient " E ", et est reconnu par le graphe, il contiendra " ET ".

de même, si ce mot contient " R ", il contiendra " RU ")

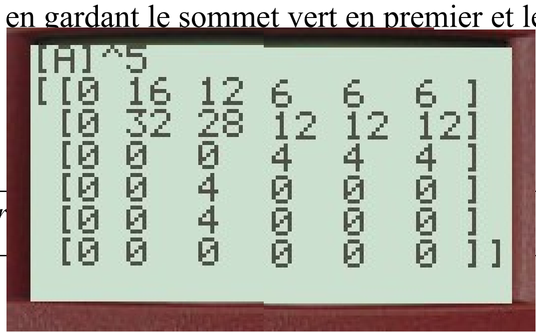
2) Le graphe reconnaît-il tous les mots commençant par BAC ?

Non, par exemple, BACHELIER n'est pas reconnu ….

Rappel :

Il suffit de trouver un mot commençant par " BAC " et non reconnu par ce graphe pour prouver que ce graphe ne reconnaît pas tous les mots commençant par BAC

3) Soit M la matrice d'adjacence (on ordonne les 6 sommets en gardant le sommet vert en premier et le sommet rouge en dernier).



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ La matrice M^5 =

Le coefficient à l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 6 est : $a_{1,6}$ = 6

On a bien 6 mots de longueur 5 reconnus par ce graphe :

BACLS BAALS BCCLS BCALS BLETS BLRUS

Remarque : en calculant M^2 , M^3 , M^4 …

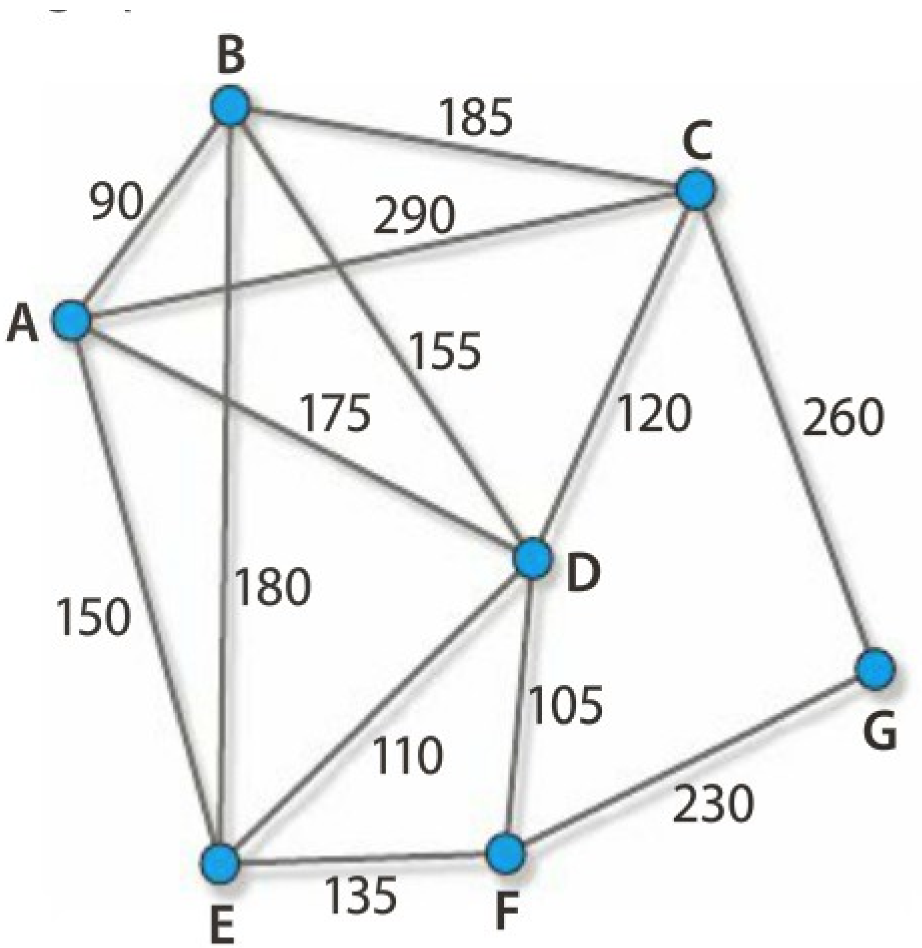
aucun mot de longueur 2 (évident)

un seul mot de longueur 3 : BLS,

deux mots de longueur 4 : BALS et BCLS

---

44 page 81

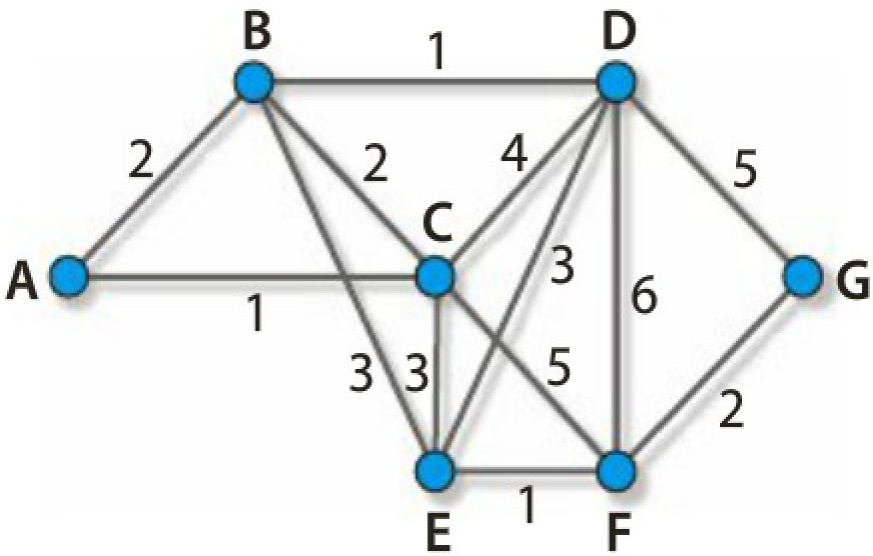


De A à G

Nom des sommets	A	B	C	D	E	F	G
Le départ est affecté de 0, les autres de ∞.	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
les sommets adjacents à A … A est traité. On prend B...		90 (A)	290 (A)	175 (A)	150 (A)	∞	∞
… de poids minimal. Sommets adjacents à B. B est traité. On prend E ...			275 (B)	175 (A)	150 (A)	∞	∞
... de poids minimal. Sommets adjacents à E. E est traité. On prend D ...			275 (B)	175 (A)		285 (E)	∞
... de poids minimal. Sommets adjacents à D. D est traité. On prend C ...			275 (B)			280 (D)	∞

... de poids minimal. Sommets adjacents à C. C est traité. On prend F ...											280 (D)		535 (B)
... de poids minimal. Sommets adjacents à F. F est traité.													510 (F)
Tous les sommets sont traités … La chaîne la plus courte a pour poids 510, c'est la chaîne A-D-F-G													

47 page 81

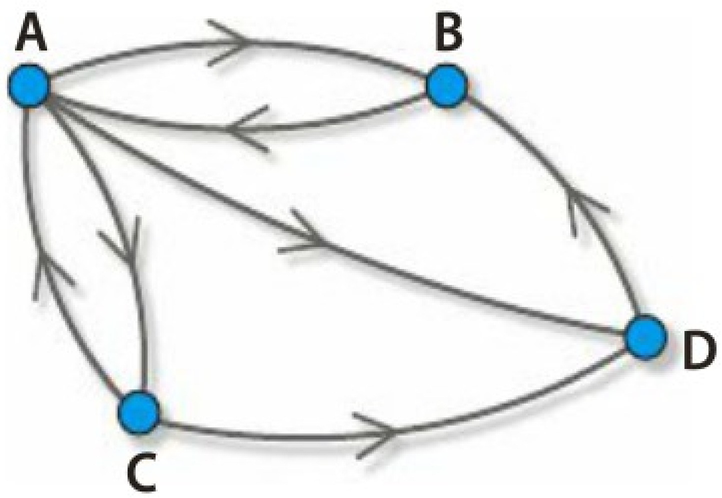


Nom des sommets	A	B	C	D	E	F	G
Le départ est affecté de 0, les autres de ∞.	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
les sommets adjacents à A … A est traité. On prend C...		2(A)	1 (A)	∞	∞	∞	∞
… de poids minimal. Sommets adjacents à C. C est traité. On prend B ...		2(A)		5 (C)	4 (C)	6 (C)	∞
... de poids minimal. Sommets adjacents à B. B est traité. On prend D ...				3 (B)	4 (C)	6 (C)	∞
... de poids minimal. Sommets adjacents à D. D est traité. On prend E ...					4 (C)	6 (C)	8 (D)
... de poids minimal. Sommets adjacents à E. E est traité. On prend F ...						5 (E)	8 (D)
... de poids minimal. Sommets adjacents à F. F est traité.							7 (F)
Tous les sommets sont traités … La chaîne la plus courte a pour poids 7, c'est la chaîne A-C-E-F-G							

TP1 page 86 ***Moteur de recherche sur le Web***

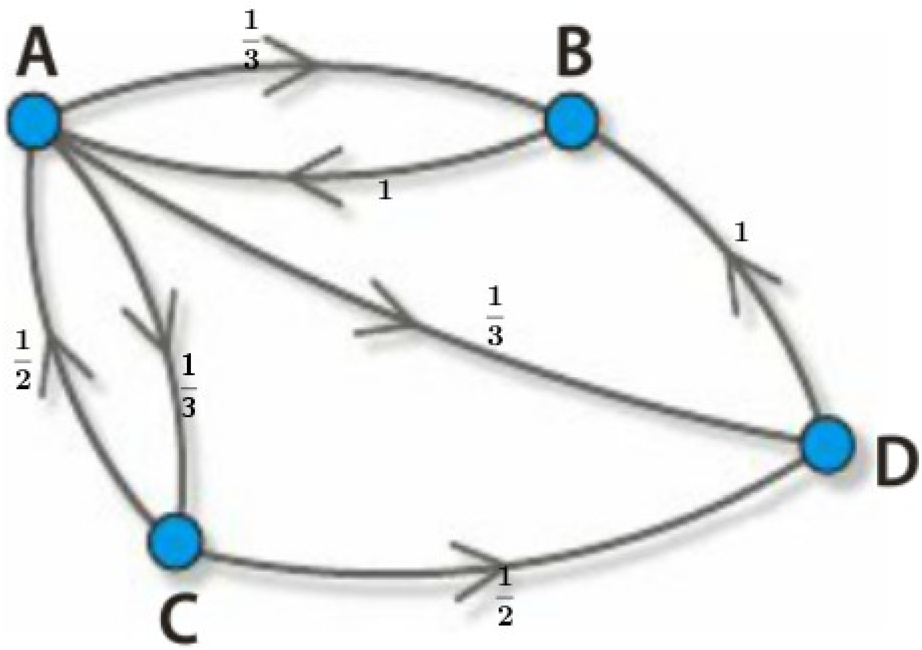
A- Un modèle réduit du Web

1) On considère le graphe orienté H suivant, décrivant les liens hypertextes entre quatre pages A, B, C, D.



Comme on suppose que l'internaute choisit les pages au hasard, on a : $P_A(B)=P_A(C)=P_A(D)=\frac{1}{3}$,

$P_B(A)=1$, $P_C(A)=P_C(D)=\frac{1}{2}$, $P_D(B)=1$, d'où, le graphe probabiliste G suivant :



2) En prenant les pages dans l'ordre alphabétique, la matrice de transition du graphe G est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) La calculatrice donne pour M^{10} , M^{20} et M^{80} les matrices suivantes. On observe que les résultats se

stabilisent (convergent vers une valeur constante).

En arrondissant au millième,

$$M^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}378 & 0{,}311 & 0{,}123 & 0{,}188 \\ 0{,}370 & 0{,}315 & 0{,}127 & 0{,}188 \\ 0{,}366 & 0{,}315 & 0{,}131 & 0{,}188 \\ 0{,}382 & 0{,}310 & 0{,}120 & 0{,}188 \end{pmatrix}, \quad M^{20} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}312 & 0{,}125 & 0{,}188 \\ 0{,}375 & 0{,}313 & 0{,}125 & 0{,}187 \\ 0{,}375 & 0{,}313 & 0{,}125 & 0{,}187 \\ 0{,}375 & 0{,}312 & 0{,}125 & 0{,}188 \end{pmatrix}$$

$$M^{80} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}313 & 0{,}125 & 0{,}187 \\ 0{,}375 & 0{,}313 & 0{,}125 & 0{,}187 \\ 0{,}375 & 0{,}313 & 0{,}125 & 0{,}187 \\ 0{,}375 & 0{,}313 & 0{,}125 & 0{,}187 \end{pmatrix}$$

4) L'internaute part de la page A.

Au départ, on a donc : P(A) = 1, P(B) = 0, P(C) = 0, P(D) = 0 où P(X) est la probabilité d'être sur la page X.

On note P_n l'état probabiliste après *n* " clics " sur les liens.

$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $P_{20} = P_0 \times M^{20} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}312 & 0{,}125 & 0{,}188 \end{pmatrix}$

Autrement dit : en partant de la page A

la probabilité d'être à la page A après 20 " clics " est 0,375.

celle d'être à la page B après 20 " clics " est 0,312.

celle d'être à la page C après 20 " clics " est 0,125.

celle d'être à la page D après 20 " clics " est 0,312.

Si l'internaute part de la page B, on obtient la deuxième ligne de la matrice M^{20}, puisque qu'en ce cas, on a pour état initial : $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_{20} = P_0 \times M^{20} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}313 & 0{,}125 & 0{,}187 \end{pmatrix}$

Si l'internaute part de la page C, on obtient la troisième ligne de la matrice M^{20}, puisque qu'en ce cas, on a pour état initial : $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_{20} = P_0 \times M^{20} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}313 & 0{,}125 & 0{,}187 \end{pmatrix}$

Si l'internaute part de la page D, on obtient la quatrième ligne de la matrice M^{20}, puisque qu'en ce cas, on a pour état initial : $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{20} = P_0 \times M^{20} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}312 & 0{,}125 & 0{,}188 \end{pmatrix}$.

5) L'objectif de la question est de déterminer l'état stable.

On pose P = $\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}$ avec $x + y + z + t = 1$

a) On pose l'équation matricielle P = PM.

On a donc : $\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}$

En effectuant le produit de matrices et en identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} 0\times x+1\times y+\frac{1}{2}\times z+0\times t=x \\ \frac{1}{3}\times x+0\times y+0\times z+1\times t=y \\ \frac{1}{3}\times x+0\times y+0\times z+0\times t=z \\ \frac{1}{3}\times x+0\times y+\frac{1}{2}\times z+0\times t=t \end{cases} \text{, soit : } \begin{cases} y+\frac{1}{2}z=x \\ \frac{1}{3}x+t=y \\ \frac{1}{3}x=z \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}z=t \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$$

b) résolution du système :

De (3), il vient : $x = 3z$, d'où, dans (4) : $z + \frac{1}{2}z = t$, soit : $t = \frac{3}{2}z$.

Dans (2), on a alors : $z + \frac{3}{2}z = y$, soit : $y = \frac{5}{2}z$.

On peut contrôler dans l'équation (1) : $\frac{5}{2}z + \frac{1}{2}z = 3z = x$

Comme $x + y + z + t = 1$, il vient : $3z + \frac{5}{2}z + z + \frac{3}{2}z = 1$, d'où, $8z = 1$.

On en déduit : $z = \frac{1}{8}$, $x = 3\times\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, $y = \frac{5}{2}\times\frac{1}{8} = \frac{5}{16}$ et $t = \frac{3}{2}\times\frac{1}{8} = \frac{3}{16}$.

P = $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$ (***Remarquer*** : ce résultat et les coefficients de la matrice M^{80} …).

c) Si on clique indéfiniment, la probabilité d'être à la page A $\frac{3}{8}$,

celle d'être à la page B est $\frac{5}{16}$,

celle d'être à la page C est $\frac{1}{8}$,

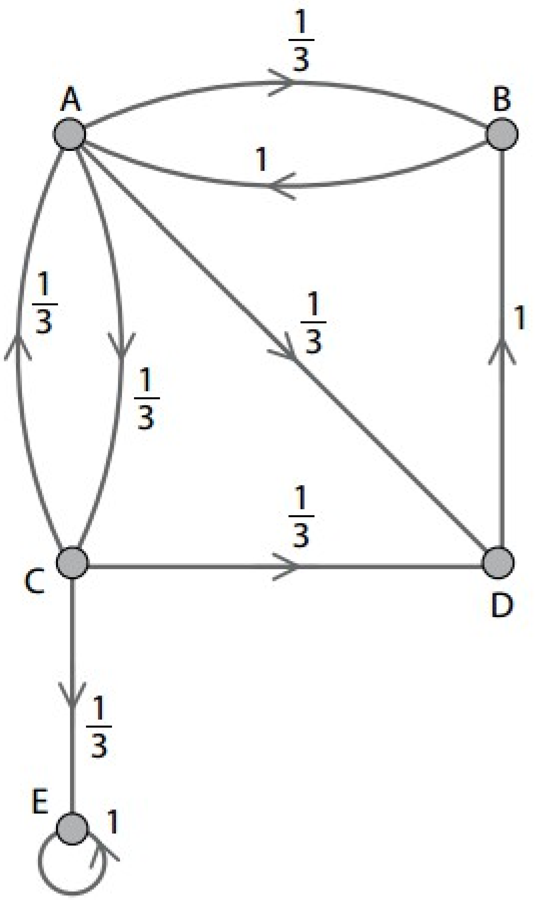
celle d'être à la page D est $\frac{3}{16}$.

B- Évolution du modèle.

1) En ajoutant une page E accessible depuis la page C mais sans lien vers d'autres pages, une fois sur la page E, on reste sur la page E.

Comme la probabilité d'arriver à la page E n'est pas nulle, la situation sera bloquée.

2) Le nouveau graphe est



et la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) M_1^{10}, M_1^{20}, M_1^{80} suggèrent que M_1^n converge vers $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quel que soit la page de départ, on finit par être sur la page E.

4) Soit $M_2 = cM_1 + (1-c)K$ où K est une matrice représentant les goûts de l'internaute et c un coefficient de l'intervalle [0 ; 1].

On choisit $K = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

a) $c = 1$, en ce cas $1 - c = 0$ et $M_2 = M_1$.

b) $c = 0$, en ce cas, $M_2 = K = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, il y a équiprobabilité pour passer d'une page à l'autre ou rester sur la même page.

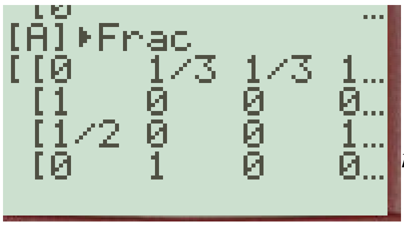
Par exemple, la première ligne $P_A(A)=P_A(B)=P_A(C)=P_A(D)=P_A(E)=\frac{1}{5}$.

C- PageRank avec les quatre pages de la partie A.

On reprend le graphe G de la partie A et on crée la nouvelle matrice de transition avec un coefficient $c = 0,85$ et la matrice K remplie des coefficients $\frac{1}{4}$.

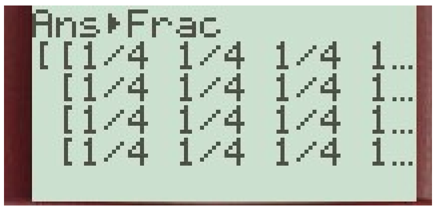
$$M = 0,85 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 - 0,85) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

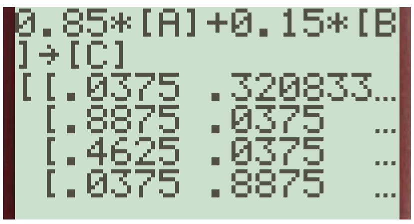
(Utiliser la calculatrice pour calculer cette nouvelle matrice et rechercher M^{80} (ou plus))



[B] a pour dimension 4×4

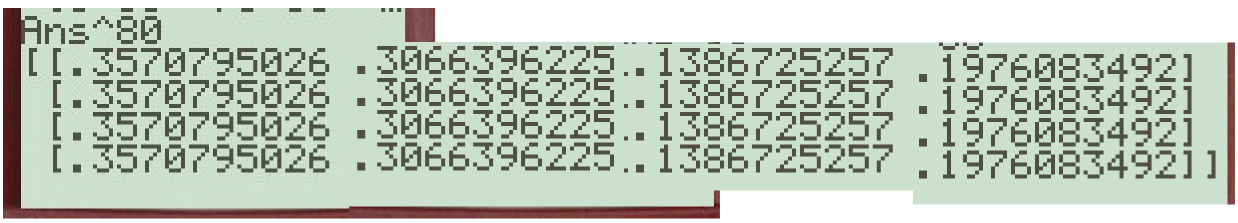
menu : matrice- math





[C] contient la matrice M.

La matrice M^{80}



61 page 84

g_n : probabilité qu'un membre du personnel souhaite le déclenchement d'une grève le jour *n*.

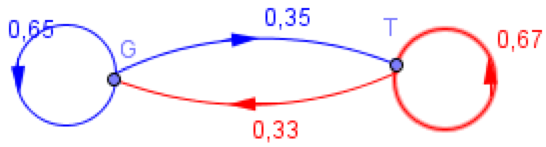
t_n : probabilité qu'un membre du personnel ne souhaite pas le déclenchement d'une grève le jour *n*.

$P_n = \begin{pmatrix} g_n & t_n \end{pmatrix}$ état probabiliste le jour *n*.

1) L'état initial $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$

2) Le graphe : G : " favorable à la grève "

T : " non favorable à la grève "



Les données : $P_G(T) = 0{,}35$ donc $P_G(G) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$

$P_T(G) = 0{,}33$, donc, $P_T(T) = 1 - 0{,}33 = 0{,}67$

3) La matrice de transition : M = $\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix}$

4) $P_n = P_1 M^{n-1}$

Le troisième jour, l'état probabiliste $P_3 = P_1 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}45096 & 0{,}54904 \end{pmatrix}$

$g_3 = 0{,}45096$, soit : 45,096 % favorables à la grève le troisième jour.

$t_3 = 0{,}54904$, soit : 54,904 % non favorables à la grève le troisième jour.

5) Comme la matrice M ne comporte aucun 0, il existe un et un seul état stable P.

P_n converge vers P.

Soit P = $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable, c'est-à-dire : P×M = P

On a donc : $\begin{cases} a \times 0{,}65 + b \times 0{,}33 = a \\ a \times 0{,}35 + b \times 0{,}67 = b \end{cases}$ (ces deux équations sont équivalentes).

Comme $a + b = 1$, on résout : $\begin{cases} a + b = 1 \\ 0{,}65a + 0{,}33b = a \end{cases}$

$b = 1 - a$ et $0{,}65a + 0{,}33(1-a) = a$, d'où, $0{,}68a = 0{,}33$

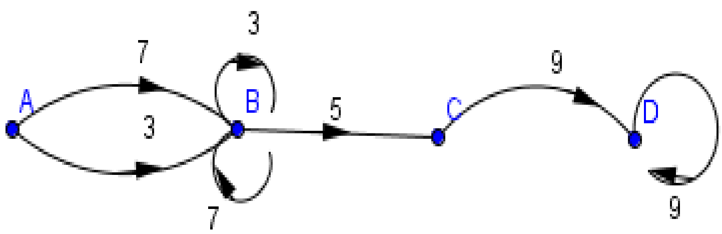
Conclusion : $a = \dfrac{33}{68}$ et $b = 1 - \dfrac{33}{68} = \dfrac{35}{68}$.

73 page 88

73 Digicode

Un immeuble de bureaux est loué à des entreprises différentes. Le propriétaire de l'immeuble souhaite donner un code personnalisé à chacune des entreprises.
Le propriétaire, par souci mnémotechnique pour les usagers, souhaite que les codes employés commencent par un nombre quelconque de « 3 » ou « 7 », comportent forcément « 5 » en partie centrale, se terminent par un nombre quelconque de « 9 » et soient formés de quatre chiffres.
Sachant que l'immeuble est loué à 16 entreprises, son souhait est-il réalisable ?

Le digicode peut commencer par " 3 " ou par " 7 " (pouvant être répétés)
comporte un " 5 " en partie centrale, peut se terminer par " 9 " pouvant être répété
et comporte quatre chiffres.
Les codes : 3359 ; 3759 ; 7359 ; 7759 ; 3599 ; 7599
On peut concevoir le graphe étiqueté suivant qui permettra de lire le digicode.



La matrice d'adjacence M = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 8 & 6 \\ 0 & 16 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le coefficient de M^4 à l'intersection de la première ligne et de la quatrième colonne est 6.

Il y a 6 chaînes de longueur 4 de A à D.