Index

I- Graphes....1
I-1- Vocabulaire et définitions :....1
I- 2- Propriété :....3
I-3- Graphe connexe, chaîne eulérienne, cycle eulérien....4
I-4- Longueur d'une chaîne....6
Définitions :....6
Nombre de chaînes de longueur p entre deux sommets....6
Propriété :....6
Analyse de la propriété sur un exemple....7
II- Quelques modèles de problèmes du programme de TES_spé....8

I- Graphes

I-1- Vocabulaire et définitions :

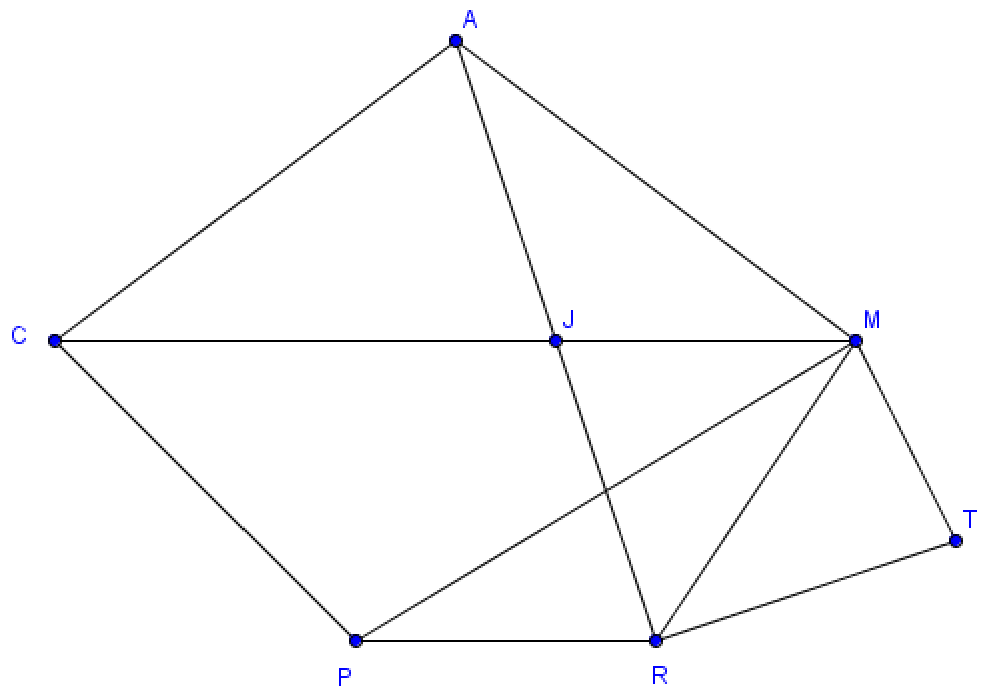
De nombreux problèmes peuvent se représenter par un graphe.

L'exemple le plus évident est celui correspondant à des villes reliées par des routes … et les questions qui se posent : aller d'une ville à l'autre par le plus court chemin, sans repasser deux fois au même endroit … sont les questions qui amènent à préciser les notions suivantes.

Un exemple :

Dans la ville Touristeville, la société Touristour propose des circuits pour visiter les sept sites importants : l'abbatiale (*A*), la cathédrale (*C*), les jardins (*J*), le musée (*M*), le palais (*P*), les ruines antiques (*R*), la tour (*T*).

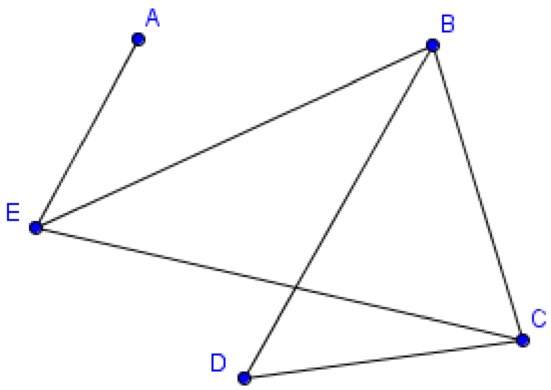
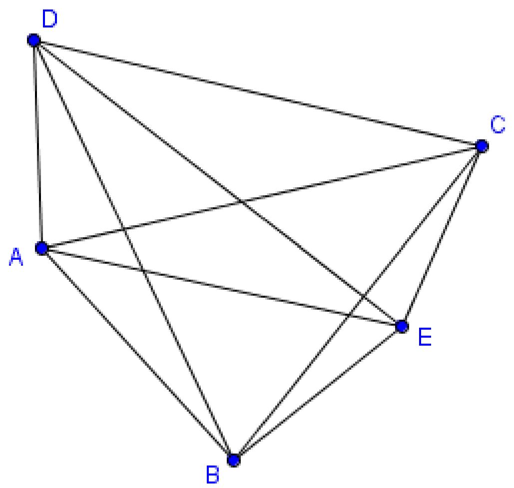
Le réseau routier est symbolisé par le **graphe** suivant. Les lieux sont les **sommets** du graphe et les routes sont les **arêtes** du graphe. (Il n'y a aucun sens unique).



On va voir dans la suite que ce graphe est d'ordre 7, qu'il n'est pas complet, qu'il est connexe, qu'on peut lui associer une matrice :

$$\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\text{arrivée}\\ \text{départ}\end{matrix} & \begin{matrix} A & C & J & M & P & R & T \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} A \\ C \\ J \\ M \\ P \\ R \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

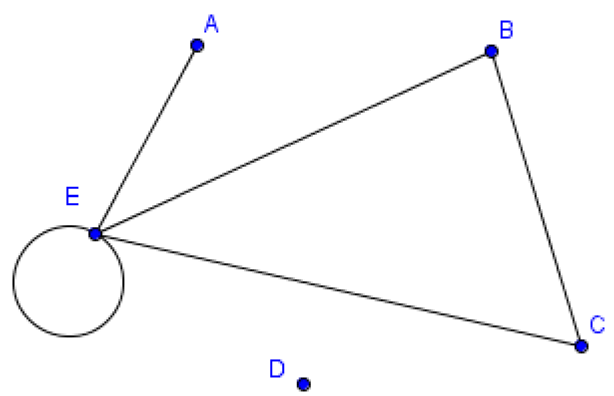
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définitions	Illustrations
le schéma ci-contre est un **graphe.** Les points A, B, C, D, E sont les **sommets** du graphe. Les segments reliant deux sommets sont des **arêtes**.	 *graphe 1*
Deux sommets sont dits **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par une arête.	Dans ce *graphe 1 :* Les sommets C et E sont adjacents. Les sommets A et B ne sont pas adjacents.
Un graphe est **complet** lorsque tous les sommets sont adjacents. Deux sommets quelconques sont reliés par une arête.	 Un graphe complet d'ordre 5. le degré de chaque sommet est 4.

L'**ordre d'un graphe** est égal au nombre de sommets.	Ce *graphe 1* est d'ordre 5
Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.	Dans ce *graphe 1 :* Le degré de A est 1, le degré de C est 3, le degré de D est 2.
Matrice d'adjacence d'un graphe est une matrice carrée d'ordre n associée à un graphe d'ordre n. En numérotant les sommets de 1 à n, le coefficient a_{ij} de la matrice indique le nombre d'arêtes reliant le sommet n°i au sommet n°j.	$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice d'adjacence du *graphe 1* ci-dessus en mettant les sommets dans l'ordre alphabétique.

Dans le *graphe 1*

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	1	3	3	2	3

Un autre exemple : *graphe 2*	Descriptions
	Ce graphe est d'ordre 5. Ce graphe n'est pas complet. Le sommet E comporte une **boucle**. **D est un sommet isolé**. En mettant les sommets dans l'ordre alphabétique, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice adjacente de ce graphe.

Dans le *graphe 2 :*

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	1	2	2	0	5

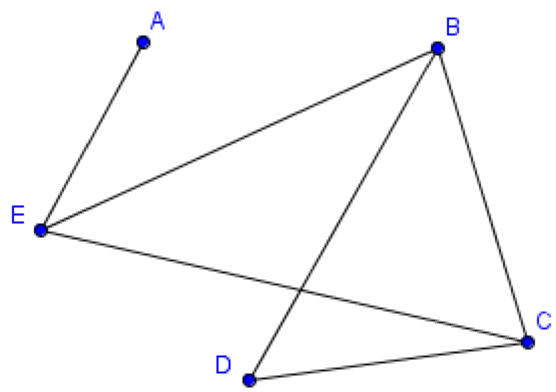
Les graphes précédents ne sont pas orientés. On peut parcourir les arêtes dans les deux sens.

I- 2- Propriété :

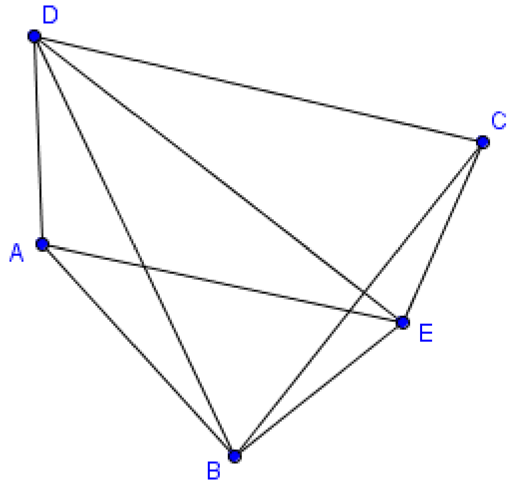
Dans un graphe non orienté, la somme des degrés de tous les sommets est un nombre pair.

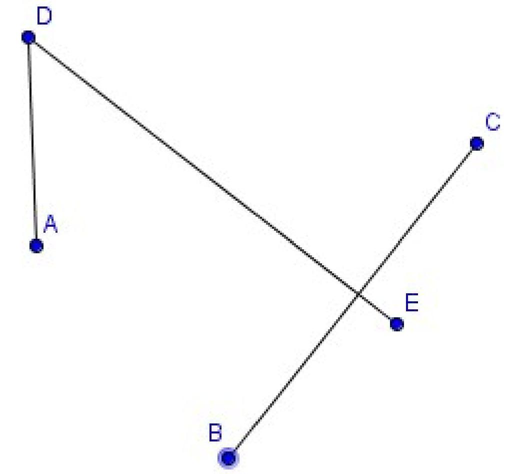
Preuve : Cela revient à compter le nombre d'arêtes partant des sommets, mais, chaque arête est comptée deux fois puisqu'elle est comptée pour chacun de ses sommets.

I-3- Graphe connexe, chaîne eulérienne, cycle eulérien.

Définitions	Illustrations
Une **chaîne** est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet est adjacent au précédent. Il existe une arête entre deux sommets consécutifs de la chaîne. La **longueur** de la chaîne est le nombre d'arêtes.	 *graphe 1* A, E, B, D est une chaîne de longueur 3. A, B, D n'est pas une chaîne
Une chaîne est **fermée** lorsque ses deux extrémités sont confondues.	Dans ce *graphe 1 :* E, B, C, D, B, E est une chaîne fermée de longueur 5.
Un **cycle** est une chaîne fermée dont toutes les arêtes sont distinctes.	Dans ce *graphe 1 :* E, B, C, E est un cycle.

<table>
<tr>
<td>Une chaîne eulérienne est une chaîne contenant toutes les arêtes du graphe une et une seule fois.

Lorsque la chaîne eulérienne est fermée, on dit qu'on a un cycle eulérien.</td>
<td>Dans le graphe 1 : il n'est pas possible de trouver une chaîne eulérienne.


Dans le graphe 3 ci-dessus, la chaîne A, E, B, A, D, B, C, E, D, C est une chaîne eulérienne.</td>
</tr>
<tr>
<td>Un graphe est dit connexe si on peut relier deux sommets quelconques par une chaîne.</td>
<td>le graphe 1 est un graphe connexe.


Ce graphe 4 n'est pas un graphe connexe.
Le sommet B n'est pas relié au sommet D par une chaîne.</td>
</tr>
</table>

Question :

Peut-on avoir dans un graphe, un nombre impair de sommets de degré impair ?

Si oui, en construire un, si non, expliquer pourquoi.

Propriété : Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.

*** Si aucun des sommets sont de degré impair, la chaîne eulérienne est fermée. (**Cycle eulérien**).

*** Si deux sommets sont de degré impair, l'un des sommets est l'origine de la chaîne eulérienne, l'autre sommet est son extrémité.

Un algorithme pour déterminer une chaîne eulérienne :

On considère un graphe connexe admettant une chaîne eulérienne (la propriété ci-dessus est vérifiée).

*** Tous les sommets sont de degré pair.

On peut former un cycle eulérien.

On commence par un sommet (peu importe) et on finit par ce sommet en employant une et une seule fois les arêtes (penser à marquer les arêtes).

*** Deux sommets exactement sont de degré impair.

Étape 1 : on construit une chaîne reliant un sommet de degré impair à l'autre sommet de degré impair en en employant une et une seule fois les arêtes (penser à marquer les arêtes).
(Si toutes les arêtes sont marquées, la chaîne eulérienne est créée).
Étape 2 : On choisit un sommet de la chaîne et on détermine un cycle eulérien à partir de ce sommet (penser à marquer les arêtes)
Si toutes les arêtes sont marquées, la chaîne eulérienne est créée.
Sinon, on recommence l'étape 2 à partir d'un autre sommet.

I-4- Longueur d'une chaîne

Définitions :

1) La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui constituent cette chaîne.

2) La **distance** entre deux sommets est la longueur de la chaîne la plus courte reliant ces deux sommets.

3) le **diamètre** d'un graphe connexe est la plus grande distance entre deux sommets.

Nombre de chaînes de longueur *p* entre deux sommets

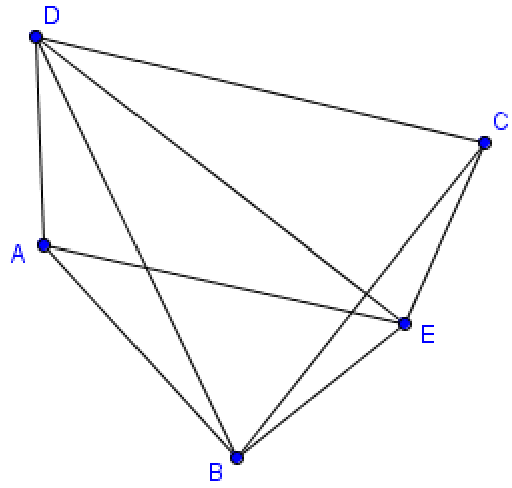
Propriété :

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté G.

On suppose les sommets numérotés de 1 à n.

Dans la matrice M^p, le coefficient a_{ij} indique le nombre de chaînes de longueur p reliant le sommet n°i au sommet n°j.

Analyse de la propriété sur un exemple



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^1 = M$$

La matrice M = M^1 indique par construction de la matrice le nombre d'arêtes reliant le sommet n° i au sommet n° j.

Une arête est une chaîne de longueur 1.

La propriété est bien vérifiée lorsque $p = 1$.

On note m_{ij} les coefficients de M.

Pour calculer un coefficient a_{ij} de M^2, on fait la somme : $m_{i1} \times m_{1j} + m_{i2} \times m_{2j} + \ldots + m_{i5} \times m_{5j}$

m_{i1} indique le nombre de chaînes de longueur 1 du sommet n°i au sommet n°1

m_{1j} indique le nombre de chaînes de longueur 1 du sommet n°1 au sommet n°j

le produit indique le nombre de chaînes de longueur 2 du sommet n°i au sommet n°j en passant par le sommet n°1,

m_{i2} indique le nombre de chaînes de longueur 1 du sommet n°i au sommet n°2

m_{2j} indique le nombre de chaînes de longueur 1 du sommet n°2 au sommet n°j

le produit indique le nombre de chaînes de longueur 2 du sommet n°i au sommet n°j en passant par le sommet n°2,

et ainsi de suite.

La somme : $m_{i1} \times m_{1j} + m_{i2} \times m_{2j} + \ldots + m_{i5} \times m_{5j}$ indique le nombre de chaînes de longueur 2 du sommet n°i au sommet n°j

Pour calculer un coefficient $b_{\mathrm{i}j}$ de M^3 = M²×M = A×M,
on fait la somme : $a_{\mathrm{i}1} \times m_{1j} + a_{\mathrm{i}2} \times m_{2\mathrm{j}} + \ldots. + a_{\mathrm{i}5} \times m_{5j}$

$a_{\mathrm{i}1}$ indique le nombre de chaînes de longueur 2 du sommet n°i au sommet n°1
$m_{1\mathrm{j}}$ indique le nombre de chaînes de longueur 1 du sommet n°1 au sommet n°j

le produit indique le nombre de chaînes de longueur 3 du sommet n°i au sommet n°j en passant par le sommet n°1,

$a_{\mathrm{i}2}$ indique le nombre de chaînes de longueur 2 du sommet n°i au sommet n°2

m_{2j} indique le nombre de chaînes de longueur 1 du sommet n°2 au sommet n°j

le produit indique le nombre de chaînes de longueur 3 du sommet n°i au sommet n°j en passant par le sommet n°2,

et ainsi de suite.

La somme : $a_{\mathrm{i}1} \times m_{1j} + a_{\mathrm{i}2} \times m_{2\mathrm{j}} + \ldots. + m_{\mathrm{i}5} \times m_{5j}$ indique le nombre de chaînes de longueur 3 du sommet n°i au sommet n°j

II- Quelques modèles de problèmes du programme de TES_spé