Index

Les prérequis

- calcul sur les matrices.
- vocabulaire " de base " sur les graphes, et, associer une matrice et un graphe.
- probabilités conditionnelles, arbres pondérés, arbres de choix …

I- Des définitions, du vocabulaire

I-1- Graphes étiquetés

Un **graphe étiqueté** est un graphe orienté où chacune des arêtes est affectée d'un mot, d'un nombre, d'une lettre … c'est-à-dire, d'une étiquette.

(Voir problème 1 page 68 dans votre livre)

Rappel et remarque : lorsqu'un graphe est orienté, les arêtes sont parcourues dans un seul sens, le sens de la flèche.

un graphe non orienté peut s'orienter en faisant deux flèches aller-retour.

I-2- Graphes pondérés, poids d'une chaîne

Un **graphe pondéré** est un graphe étiqueté où les étiquettes sont des nombres positifs.

Le **poids d'une chaîne** est la somme des poids des arêtes composant cette chaîne.

Une **plus courte chaîne** entre deux sommets est celle qui parmi toutes les chaînes sommets reliant ces deux sommets a le **poids minimal**.

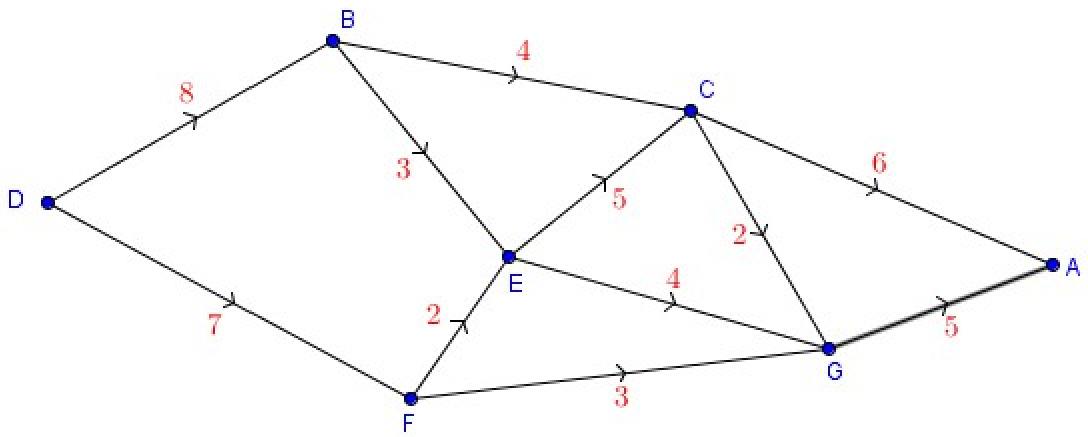
II- La recherche de la plus courte chaîne, l'algorithme de Dijkstra

Description de la méthode et un exemple

Soit G un graphe connexe pondéré et $(S_1, \ldots, S_n)$ la liste des sommets.

On recherche la plus courte chaîne de S_1 à S_n.

(illustration avec le graphe suivant) :



Le graphe représente un réseau de rivières, le sens de l'écoulement de l'eau et la durée moyenne des promenades en kayak entre deux jonctions en suivant le sens du courant.

Déterminer le chemin le plus court de D (départ) à A (arrivée).

Initialisation :

1ère ligne : On affecte S_1 du poids 0 et les autres sommets d'un poids infini ∞.

2ième ligne : On affecte les sommets adjacents à S_1 du poids de l'arête les reliant à S_1 ainsi que de l'étiquette S_1.

S_1 est maintenant traité. On met un trait vertical dans la colonne sous S_1.

On cherche le sommet *S* de poids minimal parmi les sommets adjacents à S_1.

Itération :

(***lignes suivantes***)

On cherche le poids de tous les sommets adjacents à *S* et non traités en faisant la somme du poids de l'ar^te les reliant à *S* et

D	B	C	E	F	G	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	8 (D)	∞	∞	7 (D)	∞	∞
	8 (D)	∞	9 (F)		10 (F)	∞
		12 (B)	9 (F) (car 9 < 3 + 8)		10 (F)	∞
		12 (B) (car 12 < 5+9)			10 (F) (car 10 < 4+9)	∞
		12 (B)				15 (G)
						15 (G) (car 15<6+1

du poids de *S*, et,

on note ce poids étiqueté par *S* si et seulement si il est inférieur au poids précédent déjà noté.

S est maintenant traité. On trace un trait vertical sous *S*.

On prend le sommet de poids minimal dans la ligne et on recommence avec ce nouveau sommet *S*.

Fin :

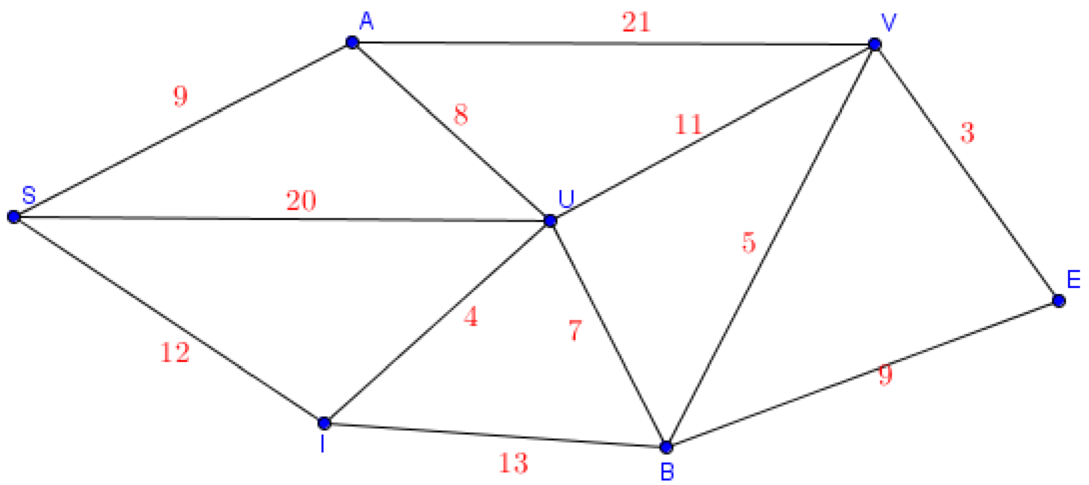
Lorsque tous les sommets ont été traités, on reprend le chemin en remontant de S_n à S_1 et en notant les sommets étiquetés.

2)

Le chemin le plus court de D à G a pour longueur 15, et, c'est le chemin : D- F- G- A

Autre exemple commenté :

Déterminer le chemin le plus court de *S* à *E*.



Nom des sommets	S	A	B	I	U	V	E
Le départ est affecté de 0, les autres de ∞.	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
les sommets adjacents à S … S est traité. On prend A ...		9 (S)	∞	12 (S)	20 (S)	∞	∞
… de poids minimal. Sommets adjacents à A. A est traité. On prend I ...			∞	12 (S)	17 (A)	30 (A)	∞
... de poids minimal. Sommets adjacents à I. I est traité. On prend U ...			25 (I)		16 (I)	30 (A)	∞
... de poids minimal. Sommets adjacents à U. U est traité. On prend B ...			23 (U)			27 (U)	∞
... de poids minimal. Sommets adjacents à B. B est traité. On prend V ...						27 (U)	32 (B)
... de poids minimal. Sommets adjacents à V. V est traité.							30 (V)
Tous les sommets sont traités … La chaîne la plus courte a pour poids 30, c'est la chaîne S-I-U-V-E							

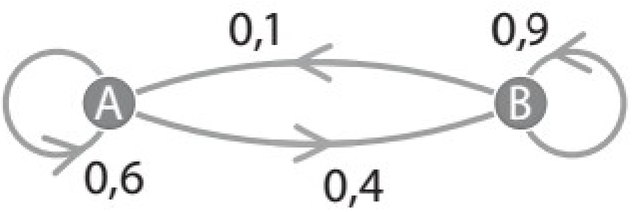
III- Graphes probabilistes

III-1- définition d'un graphe probabiliste.

Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré dont la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet est égale à 1.

Exemples :

1) Ce graphe est un graphe probabiliste :

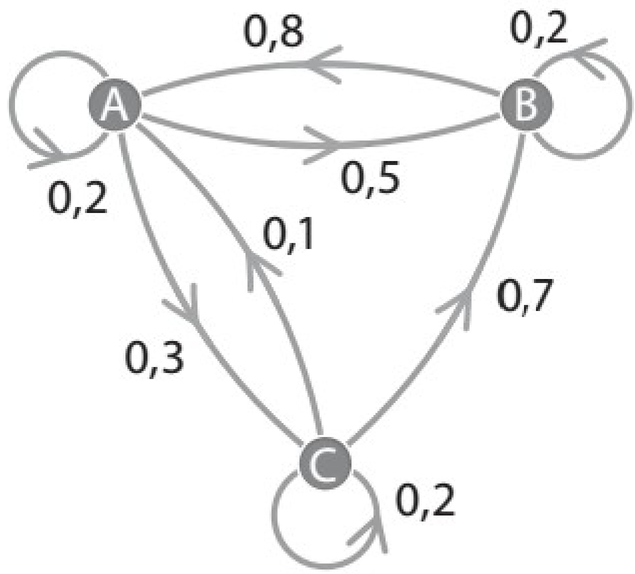


arêtes issues de A : 0,6 + 0,4 = 1

arêtes issues de B : 0,9 + 0,1 = 1

Comprendre : $P_A(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}4$

$P_B(B) = 0{,}9$, $P_B(A) = 0{,}1$



2) Ce graphe est un graphe probabiliste :

arêtes issues de A : 0,2 + 0,5 + 0,3= 1

arêtes issues de B : 0,2 + 0,8= 1

arêtes issues de C : 0,2 +0,1 + 0,7= 1

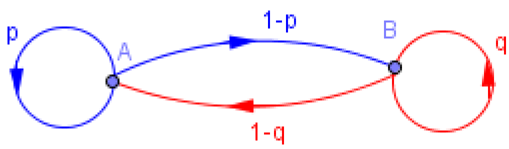
Comprendre :

$P_A(A) = 0{,}2,\ P_A(B) = 0{,}5,\ P_A(C) = 0{,}3$

$P_B(B) = 0{,}2,\ P_B(A) = 0{,}8,\ P_B(C) = 0$

$P_C(C) = 0{,}2,\ P_C(A) = 0{,}1,\ P_C(B) = 0{,}7$

3)



Ce graphe est un graphe probabiliste

si et seulement si

$0 \leqslant p \leqslant 1$ et $0 \leqslant q \leqslant 1$.

On a bien : arêtes issues de A : $p + (1-p) = 1$

arêtes issues de B : $q + (1-q) = 1$

et, une probabilité est un nombre réel compris entre 0 et 1.

III- 2- États probabilistes.

Rappel : Déterminer la loi de probabilité, c'est être capable de donner chaque événement élémentaire d'un système avec leur probabilité.

III-2-1- Définition

L'état probabiliste d'un système est la loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles.

C'est la donnée de chaque événement avec leur probabilité.

On peut représenter cet état probabiliste par une matrice ligne dont la somme des termes vaut 1.

III-2-2 État probabiliste stable

L'état probabiliste est stable lorsque à l'étape suivante on retrouve le même état.

Exemples pour illustrer les définitions:

1) Une fourmi se déplace sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC. À chaque sommet, elle va vers l'un des deux autres sommets avec la même probabilité.

(Une étude plus complète sra faite après les définitions)

Cas 1/ On suppose que la fourmi part de A et qu'elle met trois secondes pour un trajet entre deux sommets.

En notant les sommets dans l'ordre alphabétique, l'état probabiliste initial est $P_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$

car : au départ : $p(A) = 1$, $p(B) = 0$, $p(C) = 0$

Après trois secondes , l'état probabiliste est $P_1 = (0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$

car : la fourmi va vers B ou vers C avec la même probabilité.

Après six secondes , l'état probabiliste est $P_2 = (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4})$ (faire les calculs)

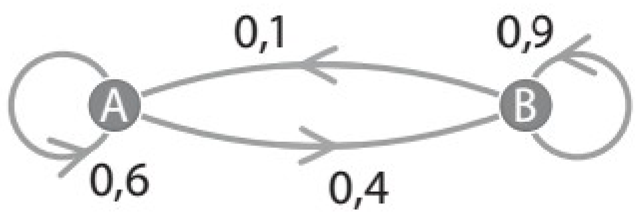
Cas 2/ On suppose que la probabilité d'être sur un des sommets **au départ** est la même $P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Montrer que $P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

L'état $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est l'état stable.

2) On reprend le graphe probabiliste de l'exemple 1) du § précédent.

cas 1/ On suppose qu'au départ la probabilité d'être en A est égale à 0,8 et celle d'être en B est 0,2.



L'état initial est $P_0 = (0{,}8 \quad 0{,}2)$

L'état suivant sera égal à

$P_1 = (0{,}8\times0{,}6 + 0{,}2\times0{,}1 \quad 0{,}8\times0{,}4 + 0{,}2\times0{,}9)$

$P_1 = (0{,}5 \quad 0{,}5)$

Montrer que $P_2 = (0{,}35 \quad 0{,}65)$

cas 2/ on suppose qu'au départ l'état probabiliste est P = $(a \quad b)$ avec $a + b = 1$

Calculer a et b pour que P soit l'état stable du graphe probabiliste.

On a donc l'état suivant donné par : " être en A " $a\times0{,}6 + b\times0{,}1$

" être en B " $a\times0{,}4 + b\times0{,}9$

P est l'état stable si et seulement si $a\times0{,}6 + b\times0{,}1 = a$ (1) et $a\times0{,}4 + b\times0{,}9 = b$ (2)

Ces deux équations sont **équivalentes** :

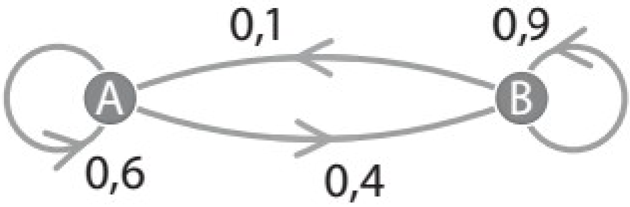
en effet, les deux équations se ramènent à la même équation : $a\times0{,}4 - b\times0{,}1 = 0$ (3)

Comme $a + b = 1$, on peut remplacer b par $1 - a$ dans l'équation (3).

$a\times0{,}4 - b\times0{,}1 = 0$ devient : $a\times0{,}4 - (1 - a)\times0{,}1 = 0$

on en déduit : $0{,}5a = 0{,}1$, d'où, $a = \frac{1}{5} = 0{,}2$ et $b = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

P = (0,2   0,8) est l'état stable du graphe



Analyse des calculs :

Connaissant un état probabiliste $P_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$, on obtient l'état suivant : $P_{n+1} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_n+1 \end{pmatrix}$ (faire un arbre) avec

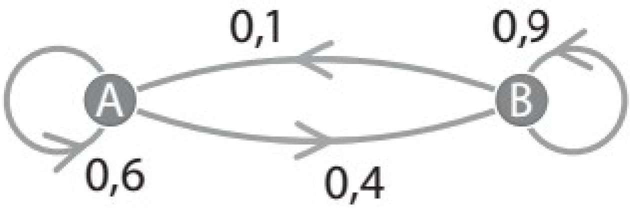
$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}6\,x_n+0{,}1\,y_n & 0{,}4\,x_n+0{,}9\,y_n \end{pmatrix}$, d'où, le système : $\begin{cases} x_{n+1}=0{,}6\,x_n+0{,}1\,y_n \\ y_{n+1}=0{,}4\,x_n+0{,}9\,y_n \end{cases}$

En appelant *M* la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$, on a : $P_{n+1} = P_n \times M$.

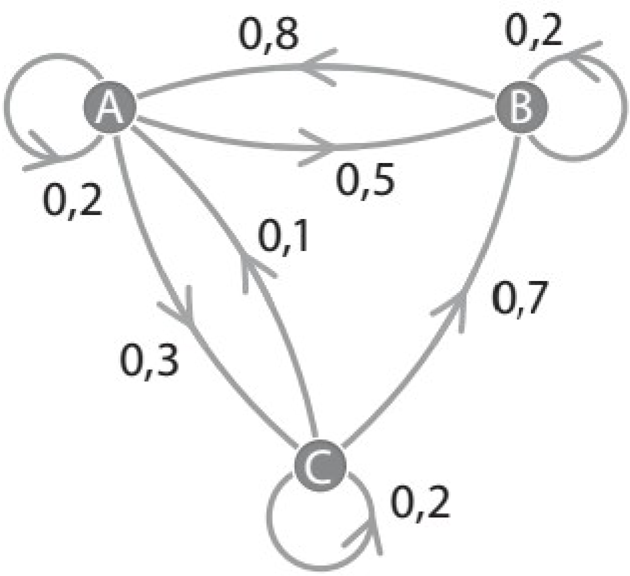
III-3- Matrice de transition

La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre *n* (*n* sommets qu'on peut numéroter de 1 à *n*) est la matrice carrée d'ordre *n* où le terme a_{ij} à l'intersection de la ligne *i* et de la colonne *j* est égal au poids de l'arête allant de *i* vers *j* du graphe probabiliste (Si l'arête n'existe pas elle est affectée du poids 0).

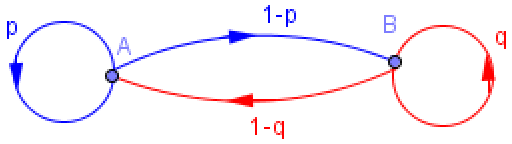
Exemples :



M = $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$



M = $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}$



$$M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

Propriétés :

1) Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste, P_0 la matrice ligne décrivant l'état probabiliste initial.

On note P_n l'état probabiliste à l'étape n.

On a : $P_{n+1} = P_n \times M$

2)

$P_1 = P_0 \times M$, $P_2 = P_1 \times M = P_0 \times M \times M = P_0 \times M^2$, $P_3 = P_2 \times M = P_0 \times M^2 \times M = P_0 \times M^3$,

On a ainsi de suite : $P_n = P_0 \times M^n$

3) Pour tout graphe dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état probabiliste P_n converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0 .

Cet état P vérifie l'égalité $P \times M = P$.

P est l'état stable du graphe probabiliste.

IV- Exercices

IV-1- déplacement d'une fourmi

Une fourmi se déplace sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC. À chaque sommet, elle va vers l'un des deux autres sommets avec la même probabilité. On suppose que la fourmi part de A et qu'elle met trois secondes pour un trajet entre deux sommets.

On note a_n , b_n , c_n les probabilités respectives d'être pour la fourmi en A, en B , en C.

On a donc : $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$

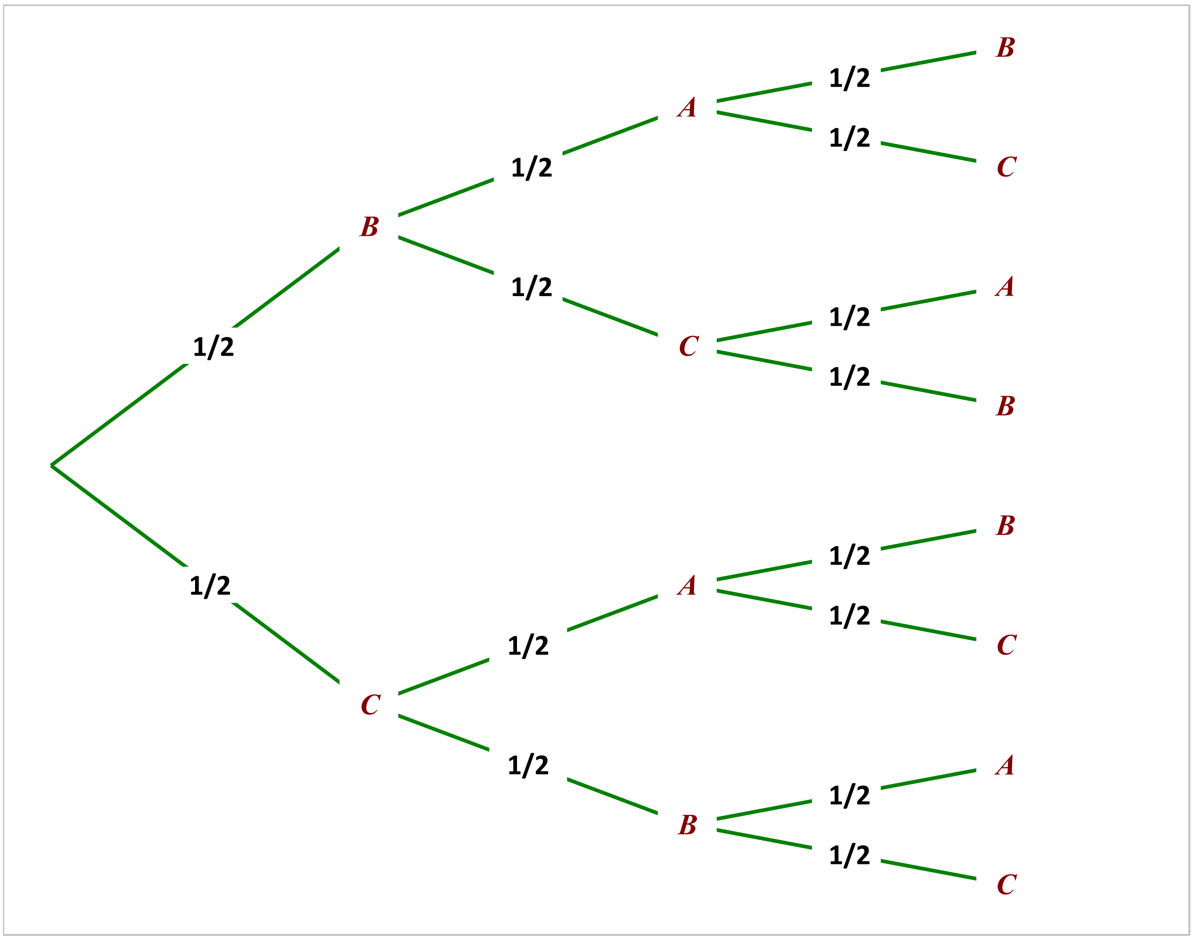
Montrer que $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n \end{cases}$

Quelle est la probabilité au millième près de revenir en A au bout de 30 secondes ?

Déterminer l'état stable.

Cette situation peut se représenter par un arbre, par un graphe ou par une matrice.

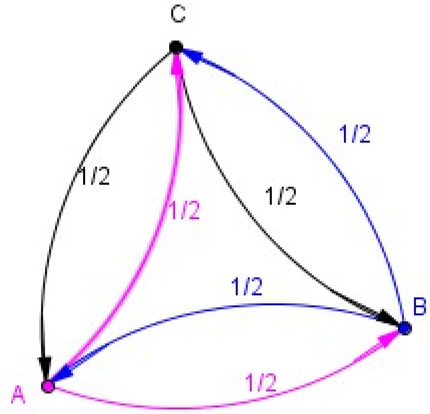
Arbre (parcours avec trois trajets)



Graphes pondérés, graphes probabilistes

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

Graphe probabiliste :



Les points A, B et C sont les sommets du graphe et les côtés parcourus dans un sens ou dans l'autre sont les arêtes du graphe. Les probabilités sont inscrites sur l'arête. **Matrice de transition :**

Les coefficients de la matrice sont les probabilités inscrites précédemment :

$$\begin{array}{c|ccc} \text{départ} \nearrow \text{Arrivée} & A & B & C \\ \hline \begin{array}{c} A \\ \\ B \\ \\ C \end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

En numérotant les sommets A, B et C respectivement 1, 2 et 3, un coefficient a_{ij} de la matrice M pour $1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant 3$ et $1 \leqslant \mathrm{j} \leqslant 3$ représente la probabilité d'aller du sommet n°i au sommet n°j.

Soit b_{ij} les coefficients de la matrice M^2.

$b_{ij} = a_{\mathrm{i}1} \times a_{1\mathrm{j}} + a_{\mathrm{i}2} \times a_{2\mathrm{j}} + a_{\mathrm{i}3} \times a_{3\mathrm{j}}$ probabilité d'aller du sommet n°i au sommet n°j en deux trajets.

(***Voir probabilité totale*** :

P(i à j en deux trajets) = P(i à 1)$\times P_1$ (1 à j) + P(i à 2)$\times P_2$ (2 à j) + P(i à 3)$\times P_3$ (3 à j))

$$P_{n+1} = P_n \times M \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

d'où, $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n \end{cases}$

Les coefficients de la matrice M^n sont les probabilités d'aller d'un sommet n°i à un sommet n°j en *n* trajets.

Calcul de M^{10} : La calculatrice donne $\begin{pmatrix} 0{,}333 & 0{,}33 & 0{,}333 \\ 0{,}333 & 0{,}33 & 0{,}333 \\ 0{,}333 & 0{,}33 & 0{,}333 \end{pmatrix}$.

La probabilité de revenir en *A* en 30 secondes est d'environ 0,333

Pour trouver l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, on résout le système :

$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c \\ b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c \\ c=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \end{cases}$, en multipliant par 2, les équations (2), (3), (4), on a : $\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2a=b+c \\ 2b=a+c \\ 2c=a+b \end{cases}$,

on déduit : $\begin{cases} 3a=1 \\ 3b=1 \\ 3c=1 \end{cases}$

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

IV-2- Saut de puce.

Une puce se déplace de façon aléatoire sur les quatre sommets d'un carré. À partir d'un sommet, elle peut sauter sur un des trois autres sommets suivant les probabilités suivantes : la puce saute sur place avec une probabilité égale à *p*, si le sommet est le sommet opposé, la probabilité est 2*p*, si le sommet est un des sommets consécutifs, la probabilité est 3*p*.

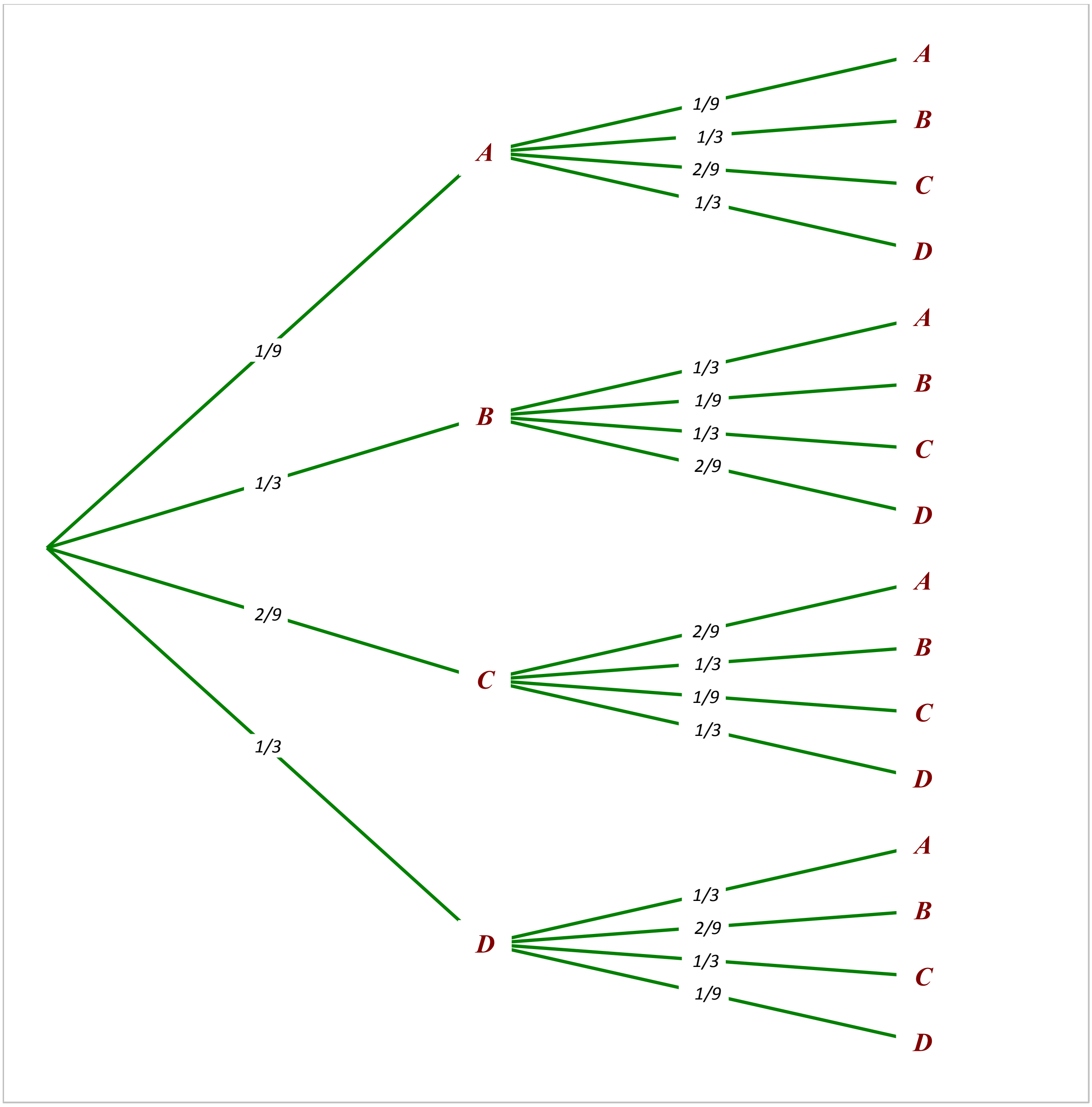
Elle part de *A*. Quelle est la probabilité à 10^{-2} près de revenir en *A* au bout de 15 sauts ?

Quelle semble être l'état stable ? Vérifier votre conjecture.

On peut représenter cette situation par un arbre de probabilité, par un graphe, ou par une matrice.

On a : $p + 2\times 3p + 2p = 1$, d'où, $p = \frac{1}{9}$.

Arbre (deux sauts)



La probabilité $P(A_2)$ d'être en A après deux sauts est :

$$P(A_2) = \frac{1}{9}\times\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\times\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1+9+4+9}{81} = \frac{23}{81}.$$

Complément :

Probabilité d'être en B après deux sauts :

$$P(B_2) = \frac{1}{9}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{9} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

Probabilité d'être en C après deux sauts :

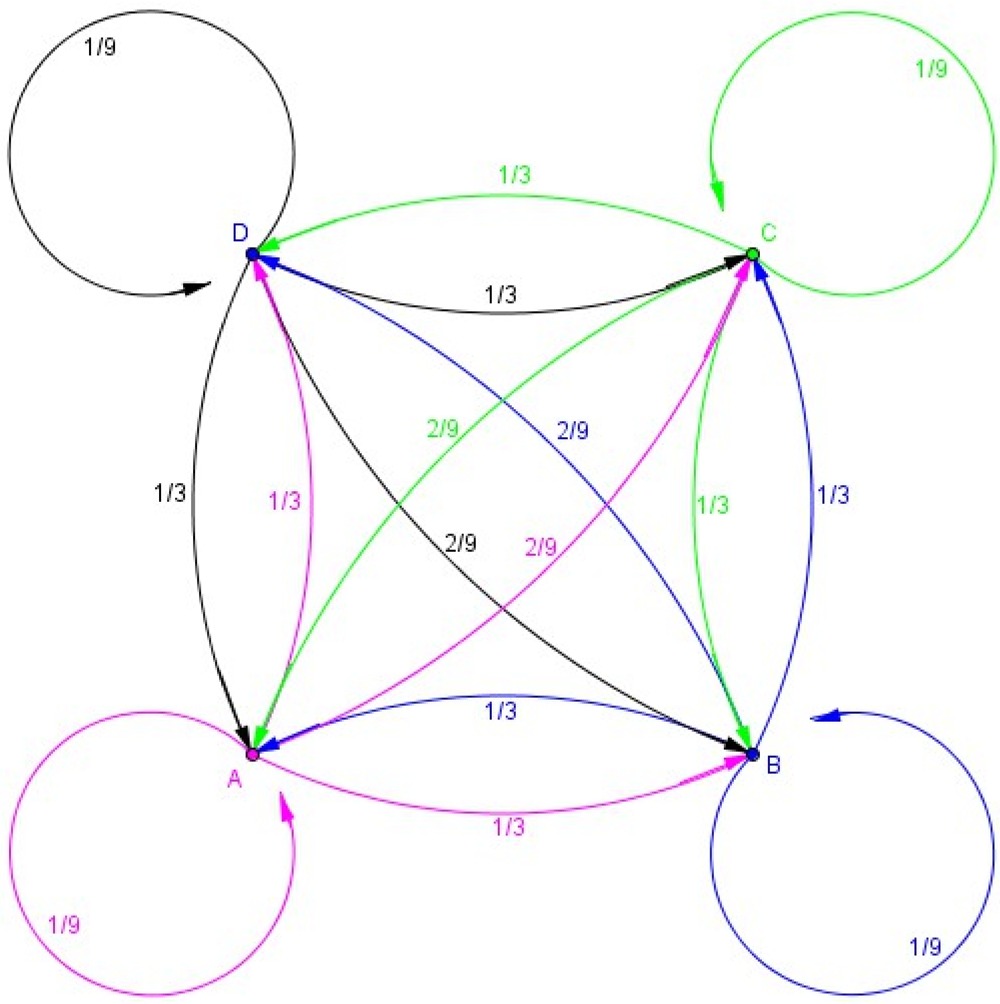
$$P(C_2) = \frac{1}{9}\times\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\times\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{22}{81}$$

Probabilité d'être en D après deux sauts :

$$P(D_2) = \frac{1}{9}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{9} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

On a bien : $\frac{23}{81} + \frac{2}{9} + \frac{22}{81} + \frac{2}{9} = \frac{23+18+22+18}{81} = \frac{81}{81} = 1$

Graphe probabiliste :



Graphes pondérés, graphes probabilistes

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

Matrice de transition :

$$\begin{array}{c|cccc} \text{départ} \backslash \text{arrivée} & A & B & C & D \\ \hline \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

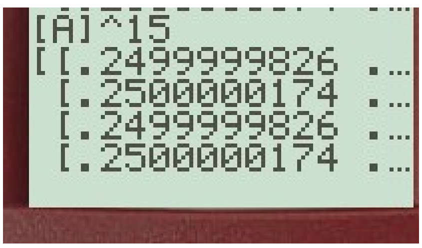
La matrice M^2 donne la probabilité d'être en un des sommets après deux sauts à partir d'un des sommets

À la calculatrice : $M^2 = \begin{pmatrix} \frac{23}{81} & \frac{2}{9} & \frac{22}{81} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{23}{81} & \frac{2}{9} & \frac{22}{81} \\ \frac{22}{81} & \frac{2}{9} & \frac{23}{81} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{22}{81} & \frac{2}{9} & \frac{23}{81} \end{pmatrix}$

Après deux sauts

$$\begin{array}{c|cccc} \text{départ} \backslash \text{arrivée} & A & B & C & D \\ \hline \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} \frac{23}{81} & \frac{2}{9} & \frac{22}{81} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{23}{81} & \frac{2}{9} & \frac{22}{81} \\ \frac{22}{81} & \frac{2}{9} & \frac{23}{81} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{22}{81} & \frac{2}{9} & \frac{23}{81} \end{pmatrix}} \end{array}$$

Après 15 sauts, en calculant M^{15} :



$P_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0;\end{pmatrix}$ $\quad P_{15} = P_0 \times M^{15} \approx \begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25\end{pmatrix}$ en arrondissant à à 10^{-2}

La probabilité à 10^{-2} près est 0,25 de se retrouver en *A* pour la puce.

Il semble que l'état stable soit $\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

Posons $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

On calcule $\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9}\end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36} & \frac{3}{36}+\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36} & \frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}+\frac{3}{36} & \frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$