

Activité d'introduction aux matrices

OBJECTIF Introduire les tableaux de nombres et les premiers calculs sur ces tableaux.

Une entreprise produit quatre articles différents A, B, C et D dans deux usines.

Au premier semestre de l'année 2012 :

- la production dans l'usine 1 est de 64 000 articles A, 31 000 articles B, 16 000 articles C et 28 000 articles D ;
- la production de l'usine 2 est de 24 000 articles A, 48 000 articles B, 28 000 articles C et 8 000 articles D.

A. Représentations par des tableaux de nombres

1.
 - a. Présenter ces données dans un tableau à double entrée.
 - b. Recopier ce tableau en supprimant les en-têtes de lignes et de colonnes et en ne gardant que les nombres. L'entourer de deux grandes parenthèses verticales. On nommera T_1 le tableau obtenu.
 - c. Combien ce tableau a-t-il de lignes et de colonnes ?
 - d. Expliquer ce que représente le nombre figurant à la 2^e ligne et 1^{re} colonne de ce tableau.
2. Proposer un autre tableau à double entrée présentant les mêmes données et reprendre les questions 1.b, c, d pour ce tableau. On nommera T_2 ce tableau.

B. Premiers calculs sur des tableaux de nombres

1. Augmentation au second semestre

L'entreprise souhaite augmenter sa production de 5 % au second semestre.

- a. Réaliser un tableau à double entrée qui donne la production par article et par usine au second semestre.
- b. Dresser le tableau de nombres associé. On le nommera T_3 .
- c. Comment l'obtient-on à partir de l'un des tableaux T_1 ou T_2 ?

2. Production annuelle

- a. Dresser un tableau à double entrée qui représente la production annuelle et de même format que le tableau réalisé en 1.a.
- b. Écrire le tableau de nombres associés, nommé T_4 .
- c. Expliquer comment on obtient ce tableau T_4 à partir de tableaux précédents.

3. Prix de revient

Le prix de revient unitaire est 0,50 € pour un article A, 1 € pour un article B, 2 € pour un article C et 5 € pour un article D.

- a. Écrire le calcul donnant le prix de revient annuel pour l'usine 1. Faire de même pour l'usine 2.
- b. Dans la feuille de calcul figurant en copie d'écran ci-dessous, quelle formule entrer dans la cellule J2 pour y faire figurer le prix total de revient pour l'usine 1 ? Et dans la cellule J3 pour l'usine 2 ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		article A	article B	article C	article D		prix unitaire			prix revient	
2	usine 1	131200	63550	32800	57400		0,5	article A			usine 1
3	usine 2	49200	98400	57400	16400		1	article B			usine 2
4							2	article C			
5							5	article D			

Correction :

A- Représentation par des tableaux de nombres (matrice)

Deux dispositions possibles sous forme de tableaux :

1) Une disposition :

	Article A	Article B	Article C	Article D
Usine 1	64000	31000	16000	28000
Usine 2	24000	48000	28000	8000

$$\text{On note } T_1 = \begin{pmatrix} 64000 & 31000 & 16000 & 28000 \\ 24000 & 48000 & 28000 & 8000 \end{pmatrix}$$

Tableau à 2 lignes et 4 colonnes,

Le nombre 24 000 à la 2^{ème} ligne et 1^{ère} colonne est la production quotidienne de l'article A dans l'usine 2.

2) Une autre disposition :

	Usine 1	Usine 2
Article A	64000	24000
Article B	31000	48000
Article C	16000	28000
Article D	28000	8000

$$T_2 = \begin{pmatrix} 64000 & 24000 \\ 31000 & 48000 \\ 16000 & 28000 \\ 28000 & 8000 \end{pmatrix}$$

Tableau à 4 lignes et 2 colonnes

Le nombre 31 000 à la 2^{ème} ligne et 1^{ère} colonne est la production quotidienne de l'article B dans l'usine 1.

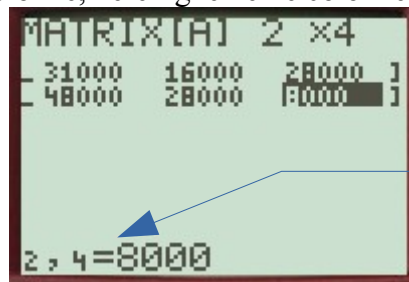
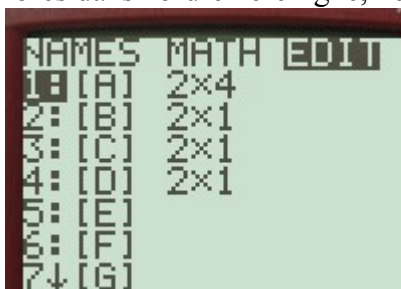
Cours (première définition) et utilisation de la calculatrice :

Les tableaux obtenus sont des matrices.

Le tableau T_1 est une matrice de dimension ou format 2×4 .

Le tableau T_2 est une matrice de dimension ou format 4×2 .

À la calculatrice, prendre le menu " matrice ", puis, " éditer " la matrice (ici : T_1) en indiquant son format et les nombres dans l'ordre 1^{ère} ligne, 1^{ère} colonne, 1^{ère} ligne 2^{ème} colonne



coefficient de la 2^{ème} ligne et 4^{ème} colonne

On peut obtenir la matrice T_2 en prenant la transposée de T_1 .

Faire " matrice " " nom [A] " " Entrée ", (la matrice T_1 est affichée)

puis " matrice " " math " " T " " entrée " et on peut mettre en mémoire dans [B]. (Faire " sto " " matrice " " nom " " [B] " " entrée "

```
[A]
[[64000 31000 1...
 [24000 48000 2...
 [[64000 31000 1...
 [24000 48000 2...
```

```
NAMES MATH EDIT
1:det(
2:T
3:dim(
4:Fill(
5:identity(
6:randM(
7↓augment(
```

```
[[64000 31000 1...
 [24000 48000 2...
 AnsT
 [[64000 24000]
 [31000 48000]
 [16000 28000]
 [28000 8000 ]]
```

B- Premiers calculs sur des tableaux de nombres

1) Une augmentation au second semestre (multiplication par un réel)

Les calculs sont faits à partir de T_1 (méthode évidemment analogue avec T_2)

Augmenter de 5 % revient à multiplier par 1,05.

Chaque coefficient de la matrice est multipliée par 1,05.

On obtient le tableau T_3 en multipliant par 1,05 le tableau T_1 .

On note : $T_3 = 1,05 \times T_1$

Cours (multiplication par un réel) et utilisation de la calculatrice ::

On multiplie chaque coefficient de la matrice M par un réel k .

On obtient une nouvelle matrice N de même format, et, on écrit : $N = k \times M$.

À la calculatrice, faire : $1,05 \times [A]$ (" matrice " " nom " [A]), " entrée " et on peut mettre en mémoire dans [C].

```
[[28000 8000 ]]
1.05*[A]
[[67200 32550 1...
 [25200 50400 2...
 Ans→[C]
 [[67200 32550 1...
 [25200 50400 2...
```

2) production annuelle (somme de matrices)

Le tableau T_4 représentant la production annuelle est obtenue en additionnant les coefficients de T_1 et de T_2 de même rang.

On obtient une nouvelle matrice de même format.

On note : $T_4 = T_1 + T_3$

Cours (somme de deux matrices) et utilisation de la calculatrice ::

Soit deux matrices M et N de **même format**.

On obtient la matrice S de même format, somme de ces deux matrices en ajoutant les coefficients de même rang.

On note : $S = M + N$

À la calculatrice, faire : $[A] + [C]$ " entrée " (qu'on peut mettre en mémoire dans [D])

```
[[25200 50400 2...
 [A]+[C]
 [[131200 63550 ...
 [49200 98400 ...
 Ans→[D]
 [[131200 63550 ...
 [49200 98400 ...
```

3) **prix de revient : (produit de deux matrices)**

Soit P la matrice représentant les prix unitaires $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ (format 4×1)

Pour obtenir le prix de revient de l'usine 1, on multiplie le nombre d'articles de chaque catégorie par le prix unitaire correspondant, et, on fait la somme de ces produits.

Prix de revient usine 1 : $131\ 200 \times 0,5 + 63\ 550 \times 1 + 32\ 800 \times 2 + 57\ 400 \times 5$

De même pour l'usine 2 :

Prix de revient usine 2 : $49\ 200 \times 0,5 + 98\ 400 \times 1 + 57\ 400 \times 2 + 16\ 400 \times 5$

On obtient un nouveau tableau T₅ de format 2×1 qui est la matrice produit T₄×P où P est la matrice des prix unitaires de format 4×1.

Présentation des calculs :

À gauche, on écrit la matrice T₃, et, au-dessus à droite la matrice P.

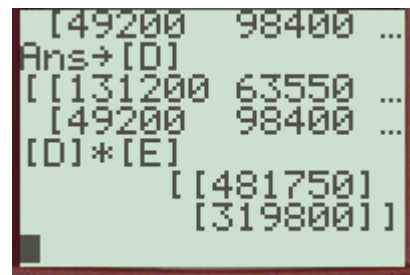
En dessous de P au niveau de T₃, on écrit la somme des produits partiels obtenus en multipliant chaque coefficient de la ligne de T₃ par chaque coefficient de la colonne de P ... voir ci-dessous.

matrice T ₃ représentant la production annuelle Format 2×4	matrice prix unitaire format 4×1 : P = $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	en effectuant
$\begin{pmatrix} 131200 & 63550 & 32800 & 57400 \\ 49200 & 98400 & 57400 & 16400 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 131200 \times 0,5 + 63550 \times 1 + 32800 \times 2 + 57400 \times 5 \\ 49200 \times 0,5 + 98400 \times 1 + 57400 \times 2 + 16400 \times 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 481750 \\ 319800 \end{pmatrix}$
<p>on multiplie le coefficient de la ligne i et de la colonne j de T₃ par celui de la ligne j et de la colonne k de P pour obtenir le prix de revient de l'article " j " .</p> <p>on fait la somme de tous ces prix de revient pour obtenir le prix de revient de l'usine " i " qui est notée dans la colonne k.</p>		

À la calculatrice :

On entre la matrice P de format 4×1 (ici : [E]).

On entre : [D]×[E] entrée



Au tableur :

=SB2*GS2+SC2*GS3+SD2*GS4+SE2*GS5										
	article A	article B	article C	article D		0,5	article A	481750	usine 1	
usine 1	131200	63550	32800	57400		1	article B	319800	usine 2	
usine 2	49200	98400	57400	16400		2	article C			
						5	article D			

La formule entrée en J2 se recopie en J3 à condition de mettre les \$ pour fixer les colonnes de la matrice T₃ (en jaune) et les lignes de la matrice P (en vert).

Le tableur contient une commande permettant de faire le produit de deux matrices.

Sélectionner d'abord une plage de deux lignes et une colonne (format de la matrice produit)

Entrer la formule =PRODUITMAT(B2:E3;G2:G5) (la plage B2:E3 est la matrice T_3 et la plage G2:G5 est la matrice P).

Faire ctrl+Maj+entrée (sinon seule la première ligne est effectuée)

A	B	C	D	E	F	G	H
	article A	article B	article C	article D		prix unitaire	
usine 1	131200	63550	32800	57400		0,5	article A
usine 2	49200	98400	57400	16400		1	article B
						2	article C
						5	article D
			481750				
			319800				

(voir copie écran)

Cours (produit de deux matrices)

Soit deux matrices M de format $m \times n$ et N de format $n \times p$.

La méthode décrite dans l'exemple permet de définir la matrice produit P de format $m \times p$;

On écrit : $P = M \times N$.

Remarques importantes :

* il n'est pas possible de commuter les deux matrices.

** si on fait tous les calculs avec T_2 (format 4×2), la matrice T_3 sera sous le même format et on doit écrire la matrice des produits unitaires sous le format 1×4 et faire en ce cas, le produit $P \times T_3$

On obtiendra en ce cas la matrice $T_5 = P \times T_4$ sous le format 1×2

Voir copie d'écran :

```
[F]*Ans
[[481750 319800...
```