L'offre et la demande.

Énoncé :

Les modèles des économistes doivent tenir compte de milliers d'industries. Nous allons étudier un modèle en le simplifiant extrêmement en ne tenant compte que de trois secteurs : la construction, le transport et l'énergie, et sans échanges extérieurs.

Chaque secteur doit répondre aux demandes des autres secteurs et à une demande fixe des consommateurs.

On note, en milliards de dollars, dans l'ordre, u_1, u_2, u_3 les quantités de production des secteurs de la construction, du transport, de l'énergie.

Les demandes en pourcentage de leur production :

de la part de Envers	secteur construction	secteur transport	secteur énergie	consommateurs
construction	10,00%	40,00%	20,00%	75
transport	20,00%	30,00%	10,00%	50
énergie	50,00%	30,00%	10,00%	80

par exemple : le secteur énergie demande $0{,}2u_3$ (milliards de $) envers la construction.

le modèle de Léontiev (1906, 1999, prix Nobel en 1973) en système fermé se traduit par :

offre = somme des demandes par les industries + demande des consommateurs.

Question :

Calculer les productions dans chaque secteur d'activités ;

Résolution :

Justifier l'égalité :

$u_1 = 0{,}1u_1 + 0{,}4u_2 + 0{,}2u_3 + 75$

La production totale en construction est égale à la somme de toutes les demandes : $\frac{10}{100}u_1 = 0{,}1u_1$ est la demande du secteur construction, $\frac{40}{100}u_2$ est la demande du secteur transport, $\frac{20}{100}u_3$ est la demande du secteur énergie et la demande des consommateurs est de 75 milliards de $.

Écrire deux autres équations traduisant les données du tableau.

$u_2 = 0{,}2u_1 + 0{,}3u_2 + 0{,}1u_3 + 50$
$u_3 = 0{,}5u_1 + 0{,}3u_2 + 0{,}1u_3 + 80$

On pose $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice L telle que $L \times U = C$ où L et C sont des matrices à coefficients constants.

$u_1 = 0{,}1u_1 + 0{,}4u_2 + 0{,}2u_3 + 75$ équivaut à $0{,}9u_1 - 0{,}4u_2 - 0{,}2u_3 = 75$
$u_2 = 0{,}2u_1 + 0{,}3u_2 + 0{,}1u_3 + 50$ équivaut à $-0{,}2u_1 + 0{,}7u_2 - 0{,}1u_3 = 50$
$u_3 = 0{,}5u_1 + 0{,}3u_2 + 0{,}1u_3 + 80$ équivaut à $-0{,}5u_1 - 0{,}3u_2 + 0{,}9u_3 = 80$

d'où L = $\begin{pmatrix} 0,9 & -0,4 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 \\ -0,5 & -0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$ et C = $\begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0,9 & -0,4 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 \\ -0,5 & -0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$ équivaut au système : $\begin{cases} 0,9\,u_1 - 0,4\,u_2 - 0,2\,u_3 = 75 \\ -0,2\,u_1 + 0,7\,u_2 - 0,1\,u_3 = 50 \\ -0,5\,u_1 - 0,3\,u_2 + 0,9\,u_3 = 80 \end{cases}$

En déduire les valeurs de u_1, u_2 et u_3.

On rentre *L* et *C* dans la calculatrice et on a : U = $L^{-1}C$

U = $\begin{pmatrix} 219,7 \\ 172,5 \\ 268,4 \end{pmatrix}$ en milliards de dollars (arrondis au dixième)

Productions ...

Énoncé :

Un complexe industriel est constitué d'une centrale électrique au fioul et d'une raffinerie de pétrole.

pour produire 1 € d'électricité, la centrale utilise :

0,10 € de sa propre production d'électricité

0,40 € de fioul produite par la raffinerie.

pour produire 1 € de fioul, la raffinerie utilise

0,30 € d'électricité produite par la centrale

0,20 € de sa propre production de fioul.

Question :

Quelles doivent être les productions totales pour satisfaire une commande de 72 000€ d'électricité et de 24 000€ de fioul ?

Résolution :

Montrer que les données peuvent se traduire par un produit de matrices C = LP où P est la matrice production représentant les productions totales d'électricité et de fioul, C est la matrice consommation représentant les consommations internes d'électricité et de fioul, et L est une matrice carrée d'ordre 2.

P = $\begin{pmatrix} P_e \\ P_f \end{pmatrix}$ où P_e et P_f sont les productions totales en euros de la centrale et de la raffinerie.

C = $\begin{pmatrix} C_e \\ C_f \end{pmatrix}$ où C_e et C_f sont les consommations internes d'électricité et de fioul par la centrale et par la raffinerie.

On a : $C_e = 0,1\ P_e + 0,3\ P_f$ en électricité, la centrale électrique consomme 0,1 € pour 1 € produit et la raffinerie consomme 0,3 € pour 1 € produit.

$C_f = 0,4\ P_e + 0,2\ P_f$ en fioul, la centrale électrique consomme 0,4 € pour 1 € produit et et la raffinerie consomme 0,2 € pour 1 € produit.

On a donc : $\begin{pmatrix} C_e \\ C_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_e \\ P_f \end{pmatrix}$

On note N la matrice représentant la commande.

pourquoi peut-on écrire : C + N = P. (1)

la production totale est égale à la consommation interne ajoutée à la production pour répondre à la commande.

La matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2, c'est-à-dire : $I_2 P = P$

L'équation (1) s'écrit alors : $(I_2 - L)P = N$

En effet, C + N = P équivaut à $N = P - C = P - LP = I_2 P - LP = (I_2 - L)P$

Calculer la matrice $I_2 - L$ et, à la calculatrice, déterminer P.

$$I_2 - L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} = A$$

On rentre cette matrice A et la matrice $N = \begin{pmatrix} 72000 \\ 24000 \end{pmatrix}$ dans la calculatrice, et, on calcule

$$P = A^{-1}N = \begin{pmatrix} 108000 \\ 84000 \end{pmatrix}$$

Vérification : la centrale consomme $0{,}1 \times 108\,000$ d'électricité et la raffinerie consomme $0{,}3 \times 84\,000$, soit :

10 800 + 25 200 = 36 000 € d'électricité consommée.

Pour livrer 72 000 € d'électricité, il faut produire : 72 000 + 36 000 = 108 000€ d'électricité.

la centrale consomme $0{,}4 \times 108\,000$ de fioul et la raffinerie consomme $0{,}2 \times 84\,000$, soit :
43 200 + 16 800 = 60 000 € de fioul consommé.

Pour livrer 24 000 € de fioul, il faut produire : 24 000 + 60 000 = 84 000€ de fioul.