

**Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Dans un pays, seulement deux opérateurs de téléphonie mobile SAFIR et TECIM proposent la 4G (standard de transmission de données).

Une étude a montré que d'une année à l'autre :

- 41 % des clients de l'opérateur SAFIR le quittent pour l'opérateur TECIM ;
- 9 % des clients de l'opérateur TECIM le quittent pour l'opérateur SAFIR ;
- Aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste  $\mathcal{G}$  de sommets  $S$  et  $T$  où :

- $S$  est l'évènement " l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur SAFIR " ;
- $T$  est l'évènement " l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur TECIM " .

Chaque année on choisit au hasard un utilisateur de la 4G et on note pour tout entier naturel  $n$  :

- $s_n$  la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur SAFIR en  $2014+n$  ;
- $t_n$  la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en  $2014+n$ .

On note  $P_n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix}$  la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année  $2014+n$ .

Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

**Partie A**

1. Dessiner le graphe probabiliste  $\mathcal{G}$ .
2. On admet que la matrice de transition du graphe  $\mathcal{G}$  en considérant les sommets dans l'ordre  $S$  et  $T$  est

$$M = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$$

On note  $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$  la matrice ligne correspondant à l'état stable de ce graphe  $\mathcal{G}$ .

- a. Montrer que les nombres  $a$  et  $b$  sont solutions du système 
$$\begin{cases} 0,41a - 0,09b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$
  - b. Résoudre le système précédent.
3. On admet que  $a=0,18$  et  $b=0,82$ . Déterminer, en justifiant, si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre son objectif.

**Partie B**

En 2014, on sait que 35 % des utilisateurs de la 4G sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 65 % sont des clients de l'opérateur TECIM. Ainsi  $P_0 = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la répartition des clients de la 4G au bout de 2 ans.
2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $t_{n+1} = 0,5t_n + 0,41$ .
3. Pour déterminer au bout de combien d'années l'opérateur TECIM atteindra son objectif, on a commencé par

élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	<b>Variables :</b>	$T$ est un nombre
L2		$N$ est un nombre entier
L3	<b>Traitement :</b>	Affecter à $T$ la valeur 0,65
L4		Affecter à $N$ la valeur 0
L5		Tant que $T < 0,80$
L6		Affecter à $T$ la valeur .....
L7		Affecter à $N$ la valeur .....
L8		Fin Tant que
L9	<b>Sortie :</b>	Afficher .....

4. On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = t_n - 0,82$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison 0,5. Préciser son premier terme.
  - En déduire que :  $t_n = -0,17 \times 0,5^n + 0,82$ .
  - Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation:  $-0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geq 0,80$ .
  - Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.