Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays, seulement deux opérateurs de téléphonie mobile SAFIR et TECIM proposent la 4G (standard de transmission de données).
Une étude a montré que d'une année à l'autre :

- *41 % des clients de l'opérateur SAFIR le quittent pour l'opérateur TECIM ;*
- *9 % des clients de l'opérateur TEcIM le quittent pour l'opérateur SAFIR ;*
- *Aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G.*

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste $\mathcal{G}$ de sommets S et T où :

- *S est l'évènement " l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur SAFIR " ;*
- *T est l'évènement " l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur TECIM " .*

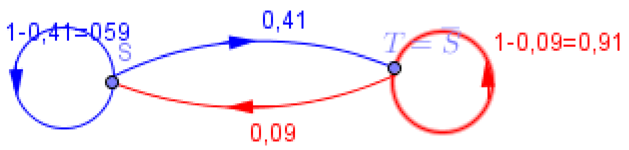
Chaque année on choisit au hasard un utilisateur de la 4G et on note pour tout entier naturel n :

- *s_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur SAFIR en $2014+n$;*
- *t_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en $2014+n$.*

On note $P_n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2014+n$.
Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste $\mathcal{G}$.
D'après les données : $P_S(T)=0{,}41$ et $P_T(S)=0{,}09$, d'où le graphe probabiliste suivant



2. *On admet que la matrice de transition du graphe $\mathcal{G}$ en considérant les sommets dans l'ordre S et T est*
$$M=\begin{pmatrix} 0{,}59 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}91 \end{pmatrix}$$
On note $P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice ligne correspondant à l'état stable de ce graphe $\mathcal{G}$.

a. *Montrer que les nombres a et b sont solutions du système* $\begin{cases} 0{,}41a-0{,}09b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$.

Par définition de l'état stable, on a: $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}59 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$,

soit: $\begin{cases} 0{,}59\,a+0{,}09\,b=a \\ 0{,}41\,a+0{,}91\,b=b \end{cases} \begin{pmatrix} l1 \\ l2 \end{pmatrix}$,

ces deux équations sont équivalentes,
car, ($l1$) devient: $a - 0{,}59a - 0{,}09b = 0$,

$0{,}41a - 0{,}009b = 0$, et,

($l2$) devient: $0{,}41a + 0{,}91b - b = 0$,

$0{,}41a - 0{,}009b = 0$.

D'autre part, P étant un état probabiliste, la somme des probabilités vaut 1, soit: $a + b = 1$.

Par conséquent, a et b sont les solutions du système : $\begin{cases} 0{,}41a - 0{,}09b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$

b. *Résoudre le système précédent.*

$\begin{cases} 0{,}41a - 0{,}09b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}41\,a - 0{,}09(1-a) = 0 \\ b = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5\,a = 0{,}09 \\ b = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0{,}18 \\ b = 0{,}82 \end{cases}$

L'état probabiliste stable est $\begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}82 \end{pmatrix}$

3. *On admet que* $a=0{,}18$ *et* $b=0{,}82$. *Déterminer, en justifiant, si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre son objectif.*

Soit $P_n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste où t_n est la probabilité qu'un utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en 2014+n

$\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n \times \mathrm{M}$

Puisque la matrice M n'a aucun coefficient nul, l'état stable est la limite de la suite des états probabilistes P_n quand n (le nombre d'années) tend vers $+\infty$.

À long terme, l'opérateur TECIM peut espérer dépasser 80% puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0{,}82$

Partie B

En 2014, on sait que 35 % des utilisateurs de la 4G sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 65 % sont des clients de l'opérateur TECIM. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix}$

1. *Déterminer la répartition des clients de la 4G au bout de 2 ans.*

Au bout de 2 ans, $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_0 \times \mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}59 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}91 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}59 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}91 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}35 \times 0{,}59 + 0{,}65 \times 0{,}09 & 0{,}35 \times 0{,}41 + 0{,}65 \times 0{,}91 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}59 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}91 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}265 & 0{,}735 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}59 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}91 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}265 \times 0{,}59 + 0{,}735 \times 0{,}09 & 0{,}265 \times 0{,}41 + 0{,}735 \times 0{,}91 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}2225 & 0{,}7775 \end{pmatrix}$$

Au bout de 2ans, 22,25% sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 77,75 % sont des clients de l'opérateur TECIM.

2. *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :* $t_{n+1} = 0{,}5t_n + 0{,}41$.

Soit $P_n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste où t_n est la probabilité qu'un utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en 2014+n,

on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n \times \mathrm{M}$

$\begin{pmatrix} s_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}59 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}91 \end{pmatrix}$

ce qui donne : $\begin{cases} s_{n+1} = 0{,}59\,s_n + 0{,}09\,t_n \\ t_{n+1} = 0{,}41\,s_n + 0{,}91\,t_n \end{cases}$, or, $s_n = 1 - t_n$,

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 0{,}41(1 - t_n) + 0{,}91\,t_n = 0{,}5\,t_n + 0{,}41$

3. *Pour déterminer au bout de combien d'années l'opérateur TECIM atteindra son objectif, on a commencé par* *élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.*

L1	**Variables :**	T est un nombre
L2		N est un nombre entier
L3	**Traitement :**	Affecter à T la valeur 0,65
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que T<0,80
L6		Affecter à T la valeur 05T+0,41
L7		Affecter à N la valeur N+1
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher T et N

4. *On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=t_n-0{,}82$.*

a. *Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Préciser son premier terme.*

$u_{n+1} = t_{n+1}-0{,}82$
$u_{n+1} = 0{,}5\,t_n+0{,}41-0{,}82$
$u_{n+1} = 0{,}5\,t_n - 0{,}41$
$u_{n+1} = 0{,}5(t_n-0{,}82)$
$u_{n+1} = 0{,}5u_n$

(puisqu'on cherche u_{n+1} en fonction de u_n, on commence par exprimer u_{n+1} en fonction de t_{n+1}. Connaissant la relation de récurrence définissant la suite (t_n), on exprime u_{n+1} en fonction de t_n. Et, comme on la relation entre t_n et u_n, on obtient une relation entre u_{n+1} et u_n).

(u_n) est donc une suite géométrique de raison 0,5
et de premier terme $u_0 = t_0 - 0{,}82 = 0{,}65 - 0{,}82 = -0{,}17$

b. *En déduire que : $t_n=-0{,}17\times0{,}5^n+0{,}82$.*
Par propriété des suites géométriques, on a : $u_n = -0{,}17\times0{,}5^n$,
et, comme $t_n = u_n + 0{,}82$, il vient : $t_n=-0{,}17\times0{,}5^n+0{,}82$

c. *Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation: $-0{,}17\times0{,}5^n+0{,}82\geqslant0{,}80$.*
En utilisant la fonction logarithme népérien :
$-0{,}17\times0{,}5^n+0{,}82\geqslant0{,}80$ équivaut à $-0{,}17\times0{,}5^n \geqslant -0{,}02$

En divisant par $-0{,}17 < 0$, on a :
$-0{,}17\times0{,}5^n+0{,}82\geqslant0{,}80$ équivaut à $0{,}5^n \leqslant \dfrac{0{,}02}{0{,}17}$ $\qquad \dfrac{0{,}02}{0{,}17} = \dfrac{2}{17}$

En appliquant la fonction logarithme népérien strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, il vient :
$\ln 0{,}5^n \leqslant \ln\dfrac{0{,}02}{0{,}17}$, soit : $n\ln0{,}5 \leqslant \ln\dfrac{2}{17}$

Comme $0< 0{,}5 < 1$, $\ln0{,}5 < 0$, d'où, $n \geqslant \dfrac{\ln\frac{2}{17}}{\ln 0{,}5}$

Une valeur approchée de $\dfrac{\ln\frac{2}{17}}{\ln 0{,}5}$ est 3,08

comme n entier naturel, l'ensemble solution de l'inéquation est l'ensemble des entiers naturels

supérieurs ou égaux à 4.
$n \geqslant 4$ et n entier naturel.
En utilisant le menu fonction et le tableur de la calculatrice :
On entre la fonction : –0,17×0,5^X+0,82
on configure la table avec DébTbl = 0 et un pas de 1
On justifie que la suite est croissante : 0 < 0,5 < 1 donc la suite géométrique $(0{,}5)^n$ est décroissante et en multipliant par –0,17 < 0, la suite (t_n) est croissante.
On affiche la Table.
On lit : pour $n = 3$, $t_3 = 0{,}79875$ et pour $n = 4$, $t_4 = 0{,}80938$
On retrouve le résultat précédent.
En utilisant le menu suite et le tableur de la calculatrice
On met en mode " suite "
On entre : *n*Min = 0
u(*n*) = 0.5u(*n*-1)+0.41
u(*n*Min)=0,65
on configure la table avec DébTbl = 0 et un pas de 1
On affiche la Table.
On lit : pour $n = 3$, $t_3 = 0{,}79875$ et pour $n = 4$, $t_4 = 0{,}80938$
On retrouve le résultat précédent.

d. *Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.*

À partir de 2018, l'opérateur TECIM peut espérer dépasser 80 % des utilisateurs de 4G.