Index

I- Notion de matrice

I-1- Définitions et notations

I-1-1- Matrice

Une matrice est un tableau de nombres.

On présente ce tableau entre deux parenthèses.

Le format de la matrice donne le nombre de lignes et le nombre de colonnes.

Un terme (ou coefficient) de la matrice est indexé par deux indices donnant dans l'ordre le numéro de la ligne et le numéro de la colonne.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ est une matrice de format 2×3 (2 lignes et 3 colonnes).

$a_{11} = 1$; $a_{12} = -2$; $a_{23} = -\frac{4}{3}$.

I-1-2- Matrice ligne

Une matrice ligne est une matrice n'ayant qu'une seule ligne.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -5 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

I-1-3- Matrice colonne

Une matrice colonne est une matrice n'ayant qu'une seule colonne.

Exemple : $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

I-1-4- Matrice carrée

Une matrice carrée est une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

I-1-5- Matrice diagonale

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les termes en-dehors de la première diagonale sont nuls.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale

I-1-6- Matrice unité

La matrice unité d'ordre n (souvent notée I_n) est une matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1.

Exemple : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

I-1-7- Matrice nulle

La matrice nulle d'ordre n (souvent notée O_n) est une matrice carré d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 0.

Exemple : $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I-2- Égalité de matrices

Deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles ont le même format et chaque élément de A est égal à l'élément correspondant de B.

Exercice :

Déterminer les réels x et y tels que $A = B$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3+x \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 5-y & 4 \end{pmatrix}$

II- Opérations sur les matrices

II-1- Addition

Important : Dans tout ce paragraphe, les matrices sont de même dimension.

II-1-1- Définitions

II-1-1-1- Somme de deux matrices

A et B sont deux matrices de même dimension.

La matrice somme de A et B, notée $A + B$ est la matrice obtenue en ajoutant à chaque terme de la matrice A le terme correspondant de la matrice B.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $S = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

L'opération qui, à deux matrices A et B, associe leur somme est l'addition (matricielle).

II-1-1-2- Opposée d'une matrice

Il est évident que en ajoutant à chacun des termes d'une matrice A l'opposé de ce terme, on obtient une matrice ne contenant que des zéros.

Cette matrice est la matrice opposée de A, notée $-A$.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $-A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $-B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

II-1-1-3- Différence de deux matrices

La matrice différence de A et B, notée $A - B$, s'obtient en ajoutant à la matrice A l'opposée de la matrice B.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $D = A - B = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

$D' = B - A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Les matrices $A - B$ et $B - A$ sont deux matrices opposés.

II-2- Multiplication d'une matrice par un réel

Soit un réel k et A une matrice.

La matrice kA est obtenue en multipliant chaque terme de la matrice A par le réel k.

Exemple :

$k = \frac{1}{2}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$C = \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En particulier :

La matrice opposée de A s'obtient en multipliant la matrice A par le réel -1.

$-A = (-1)A$.

II-3- Propriétés de des opérations

Les propriétés énoncées dans ce paragraphe découlent des propriétés opératoires des nombres réels de façon évidente.
Ce sont ces propriétés qui sont mises en œuvre dans la résolution des équations (voir l'exemple traité).
A, B et C sont trois matrices de même dimension.

k et k' sont deux réels.

	Écriture de la propriété	**On dit que** :
1	$A + B = B + A$	l'addition est **commutative**
2	$A + (B + C) = (A + B) + C$	l'addition est **associative**
3	$k(A + B) = kA + kB$	la multiplication par un réel est **distributive** sur l'addition matricielle.
4	$(k + k')A = kA + k'A$	
5	$k(k'A) = (k.k')A$	

À *quoi servent ces propriétés ?*

Ces propriétés peuvent paraître évidentes, mais ce sont ces propriétés qui justifient par exemple les méthodes usuelles de résolution algébrique des équations.

Un petit exemple :

On cherche une matrice X (inconnue) vérifiant :

$$2\left[X + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right] = 3\times\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} - X.$$

On " développe " le membre de gauche et celui de droite (*propriété 3 et définition de la multiplication par un réel*).

$$2X + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} - X.$$

On ajoute X à chaque membre (**pour garder l'égalité**)

$2X + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} - X + X.$

À gauche, d'après la commutativité (*propriété 1*) et l'associativité (*propriété 2*) de l'addition,

on a : $2X + X + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

soit d'après la *propriété 4* : $(2 + 1)X + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Comme $-X + X = 0$, l'équation devient :

$3X + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$

(Vous reconnaissez les règles usuelles de transposition lors du traitement des égalités).

On ajoute à chaque membre l'opposé de $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, ce qui mène à :

$3X = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

On réduit le membre de droite :

$3X = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$

On multiplie les deux membres par $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}(3X) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$

D'après la *propriété 5* , on a donc :

$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{-4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-5}{3} \end{pmatrix}$

Remarque : évidemment, en général on ne détaille pas les étapes où le calcul est immédiat...

II-4- Multiplication de matrices

II-4-1- Produit d'une matrice par une matrice colonne

Un exemple :

Adam et Ève ont eu respectivement les notes suivantes en anglais, maths, SES et philosophie.

Adam : 7 ; 12 ; 10 ; 9 ; Ève : 15 ; 10 ; 8 ; 11

Les coefficients par matière (anglais, maths, SES, philo) sont les suivants : 3 ; 2 ; 5 ; 3

La somme des notes coefficientées de chacun :

Pour Adam : $7\times3 + 12\times2 + 10\times5 + 9\times3 = 122$

Pour Ève : $15\times3 + 10\times2 + 8\times5 + 11\times3 = 138$

En présentant dans des tableaux (matrices) :

					coefficients	
					Anglais	3
					Maths	2
					SES	5
					Philo	3
matière élève	Anglais	Maths	SES	Philo		
Adam	7	12	10	9		122
Ève	15	10	8	11		138

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 10 & 9 \\ 15 & 10 & 8 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ 138 \end{pmatrix}$$

Plus généralement :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ est une matrice à m lignes et n colonnes et $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ une matrice colonne à n lignes.

Le produit P de A par B noté $A \times B$ ou AB est la matrice colonne à m lignes obtenue de la façon suivante :

pour obtenir une ligne n°i de la matrice produit P, on multiplie chaque coefficient de la ligne n°i de A et de la colonne n°j par le coefficient de la ligne n°j de B.

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \dots + a_{1n} \times b_{n1} \\ \dots \\ a_{m1} \times b_{11} + a_{m2} \times b_{21} + \dots + a_{mn} \times b_{n1} \end{pmatrix}$$

Important : le nombre de lignes de la matrice B est égal au nombre de colonnes de la matrice A.

II-4-2- Produit de deux matrices

Exemple :

On reprend l'exemple précédent en complétant par l'entrée dans plusieurs écoles où les coefficients sont différents.

Une école à dominante SES : les coefficients (anglais, maths, SES, philo) sont les suivants : 3 ; 2 ; 5 ; 3

Une école à dominante scientifique : les coefficients (anglais, maths, SES, philo) sont les suivants : 2 ; 6 ; 2 ; 2

Une école à dominante lettres : les coefficients (anglais, maths, SES, philo) sont les suivants : 4 ; 2 ; 2 ; 4

					coefficients			
						SES	Sciences	Lettres
					Anglais	3	2	4
					Maths	2	6	2
					SES	5	2	2
					Philo	3	2	4
matière élève	Anglais	Maths	SES	Philo				
Adam	7	12	10	9		122	124	108
Ève	15	10	8	11		138	128	140

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 10 & 9 \\ 15 & 10 & 8 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 & 124 & 108 \\ 138 & 128 & 140 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ est une matrice à m lignes et n colonnes et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$ une matrice à n lignes et p colonnes.

On peut décomposer la matrice B en juxtaposant les matrices colonnes :

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \dots,\ B_n = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \dots \\ b_{nn} \end{pmatrix}$$

Le produit P de A par B noté $A\times B$ ou AB est la matrice à m lignes et p colonnes obtenue en considérant chaque colonne de la matrice B comme une matrice à n lignes et une colonne et en juxtaposant les matrices P_{i} colonnes obtenues par les produits $A\times B_{\mathrm{i}}$.

Important : le nombre de lignes de la matrice B est égal au nombre de colonnes de la matrice A.

En pratique : Disposition des matrices pour effectuer le produit:

On dispose les deux matrices à multiplier de façon à avoir au croisement de la ligne n° i de A et de la colonne n° j de B, le nombre c_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & -6 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$2\times1+(-1)\times5+(-3)\times1$

Le produit AB est la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & -6 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

II-4-3- Puissances d'une matrice carrée

A est une **matrice carrée**.

Comme pour les nombres réels, on note avec un exposant le produit d'une matrice carrée par elle-même.

On a : $A^0 = I_n$ matrice identité.

$A^1 = A$

$A^2 = A\times A$

$A^n = \underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{\text{produit de } n \text{ matrices } A}$

II-4-4- Propriétés (admises)

A, B et C sont trois matrices telles que les opérations suivantes sont possibles.

$A(BC) = (AB)C$ *(associativité de la multiplication)*

$A(B + C) = AB + AC$ *(distributivité à gauche de la multiplication sur l'addition)*

$(A + B)C = AC + BC$ *(distributivité à droite de la multiplication sur l'addition)*

Attention !

Le produit matriciel n'est pas commutatif.

On peut avoir un produit nul sans avoir une matrice nulle comme facteur.

Exemples :

Calculer les produit AB et BA avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer le produit AB avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

III- Résolution de systèmes, matrice inverse d'une matrice carrée

Quelques rappels de vocabulaire et de définitions.

Lorsqu'on multiplie un nombre par son inverse, on trouve 1.

L'inverse d'un réel x non nul est le nombre x' qui multiplié par x donne 1.

On a : $x \times x' = 1$ et, on note souvent : $x' = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$

La notation $\dfrac{1}{x}$ utilisée dans $\mathbb{R}$ n'est pas utilisée dans l'ensemble des matrices.

La définition et la notation x^{-1} sont conservées dans l'ensemble des matrices.

La nécessité de rechercher l'inverse d'un nombre apparaît lors de la résolution d'équation de la forme : $ax = b$.

Si $a \neq 0$, on multiplie chaque membre de l'égalité par l'inverse de a afin d'avoir : $\dfrac{1}{a} \times a \times x = \dfrac{1}{a} \times b$,

soit : $x = \dfrac{b}{a}$.

Dans l'ensemble des matrices, on aura le même procédé (mais pas les écritures de quotient) pour la résolution des équations : $AX = B$

Attention : Puisqu'en général, le produit n'est pas commutatif, il faudra distinguer deux sortes d'équation.

L'équation $AX = B$ est différente de l'équation $XA = B$.

III- 1- définitions et notations.

Soit A une **matrice carrée** d'ordre n.

a) On dit que la matrice carrée B d'ordre n est la matrice inverse de A lorsque A×B = B×A = I_n (matrice unité ou identité d'ordre n)

b) En ce cas, on dit que la matrice carrée A est inversible.

c) Il est évident que si B est l'inverse de A alors A est l'inverse de B.

d) On note : A^{-1} la matrice inverse de A.

On a : A^{-1} A = A $A^{-1} = I_n$.

III-2- Propriétés

A est une matrice carrée d'ordre n.

X et T sont des matrices telles que les opérations proposées sont possibles.

a) à admettre :

Si B est une matrice telle que AB = I_n alors BA = I_n

A est une matrice carrée d'ordre *n* et inversible.

b) Si AX = T alors X = A^{-1} T.

c) Si XA = T alors X = T A^{-1}.

Preuves :

Pour b) : Puisque A est inversible, il existe une matrice A^{-1} telle que $A^{-1} A = I_n$.

En multipliant à gauche chaque membre de l'égalité, on a : AX = T équivaut à A^{-1} AX = A^{-1} T

Comme $A^{-1} A = I_n$, on obtient : X = A^{-1} T.

pour c) : Puisque A est inversible, il existe une matrice A^{-1} telle que $A\,A^{-1} = I_n$.

En multipliant à droite chaque membre de l'égalité, on a : XA = T équivaut à XA A^{-1} = T A^{-1}.

Comme A $A^{-1} = I_n$, on obtient : X = T A^{-1}.

Deux exemples de calculs.

Exemple 1 :

A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ X = $\begin{pmatrix} t & u \\ v & x \\ y & z \end{pmatrix}$ T = $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Le produit AX = T est possible (On ne peut pas faire le produit XA)

La calculatrice donne comme solution : S = $\begin{pmatrix} \frac{-4}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{-6}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{48}{13} \end{pmatrix}$.

Exemple 2 :

A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ X = $\begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ T = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Les deux produits AX = T et XA = T sont possibles.

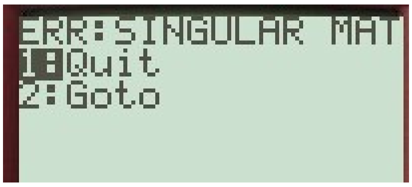
L'équation AX = T a pour solution A^{-1} T = S_1 = $\begin{pmatrix} \frac{-3}{13} & \frac{6}{13} & -713 \\ \frac{-1}{13} & \frac{15}{13} & \frac{-11}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{-16}{13} & \frac{49}{13} \end{pmatrix}$

L'équation XA = T a pour solution T A^{-1} = S_2 = $\begin{pmatrix} \frac{9}{13} & \frac{-2}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{-8}{13} & \frac{22}{13} & \frac{25}{13} \\ \frac{-7}{13} & \frac{29}{13} & \frac{30}{13} \end{pmatrix}$

Attention : Certaines matrices carrées ne sont pas inversibles …. dans ce cas, on ne pourra pas utiliser le § précédent.

Par exemple : la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. (Voir paragraphe III-4).

En ce cas, la calculatrice renvoie un message d'erreur.



III-3- Applications aux systèmes linéaires

Soit le système linéaire $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-2y+z=1 \\ 3x+y+2z=3 \end{cases}$

Avec une matrice colonne inconnue

On peut écrire la matrice du triplet inconnu en colonne : soit X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Si on appelle A la matrice carrée, d'ordre 3, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ obtenue en lisant en ligne les coefficients des trois équations, on a : AX = $\begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ x-2y+z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix}$.

On note B = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, le système linéaire est équivalent à l'équation matricielle AX = B

D'après le §III-2, le triplet solution est représentée par la matrice colonne $S_{col} = A^{-1}$ B = $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$

Avec une matrice ligne inconnue

On peut écrire la matrice du triplet inconnu en colonne : soit X = $(x \;\; y \;\; z)$.

Si on appelle A la matrice carrée, d'ordre 3, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ obtenue en lisant en colonne les coefficients des trois équations, on a : XA = $\begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ x-2y+z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix}$.

On note B = (0 1 3), le système linéaire est équivalent à l'équation matricielle XA = B

D'après le §III-2, le triplet solution est représentée par la matrice colonne $S_{lig} = \mathrm{B}\,A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$

III-4- Recherche théorique sur les matrices carrées d'ordre 2 inversibles.

Considérons le système linéaire $\begin{cases} ax+by=u \\ cx+dy=v \end{cases}$ qui est associée à l'équation matricielle

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

On doit pour trouver la solution exprimer x et y en fonction de u et v.

Pour " éliminer " y de l'écriture afin d'isoler x, on multiplie la première équation par d et la deuxième équation par b, et, on soustrait les deux nouvelles équations.

On a donc : $adx + bdy - bcx - bdy = du - bv$

Soit $(ad - bc)x = du - bv$ (1)

Pour " éliminer " x de l'écriture afin d'isoler y, on multiplie la première équation par c et la deuxième équation par a, et, on soustrait les deux nouvelles équations.

On a donc : $acx + bcy - acx - ady = cu - av$

Soit : $(ad - bc)y = -cu + av$ (2)

Lorsque $ad - bc \neq 0$, on a le système suivant : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{ad-bc}(du-bv) \\ y = \dfrac{1}{ad-bc}(-cu+av) \end{cases}$

Propriété :

La matrice A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si le réel $ad - bc \neq 0$

(ce réel est le déterminant de la matrice A).

La matrice inverse est alors égale à : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Par exemple : la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $2\times3 - 1\times6 = 0$

La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible car $4\times2 - 2\times3 = 2$ et son inverse est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1{,}5 & 2 \end{pmatrix}$

IV- Quelques modèles de problèmes au programme de TES_Sspé

IV-1- Recherche de courbes polynomiales passant par un nombre donné de points

Exemple 1-

Existe-t-il une courbe du troisième degré passant par les points A, B, C, D de coordonnées A(1 ; –1), B(3 ; 3), C(–1 ; 2), D(5 ; 1) ?

Une équation est de la forme $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

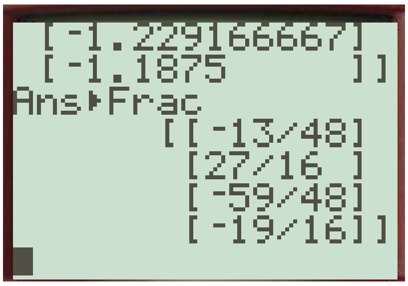
D'après les données des coordonnées des points, on obtient un système de quatre équations à quatre inconnues a, b, c et d.

$$\begin{cases} a+b+c+d=-1 \\ 27a+9b+3c+d=3 \\ -a+b-c+d=2 \\ 125a+25b+5c+d=1 \end{cases}$$

On pose la matrice (A) = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice (X) = $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et la matrice (B) = $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le système est équivalent à l'équation matricielle : AX = B.

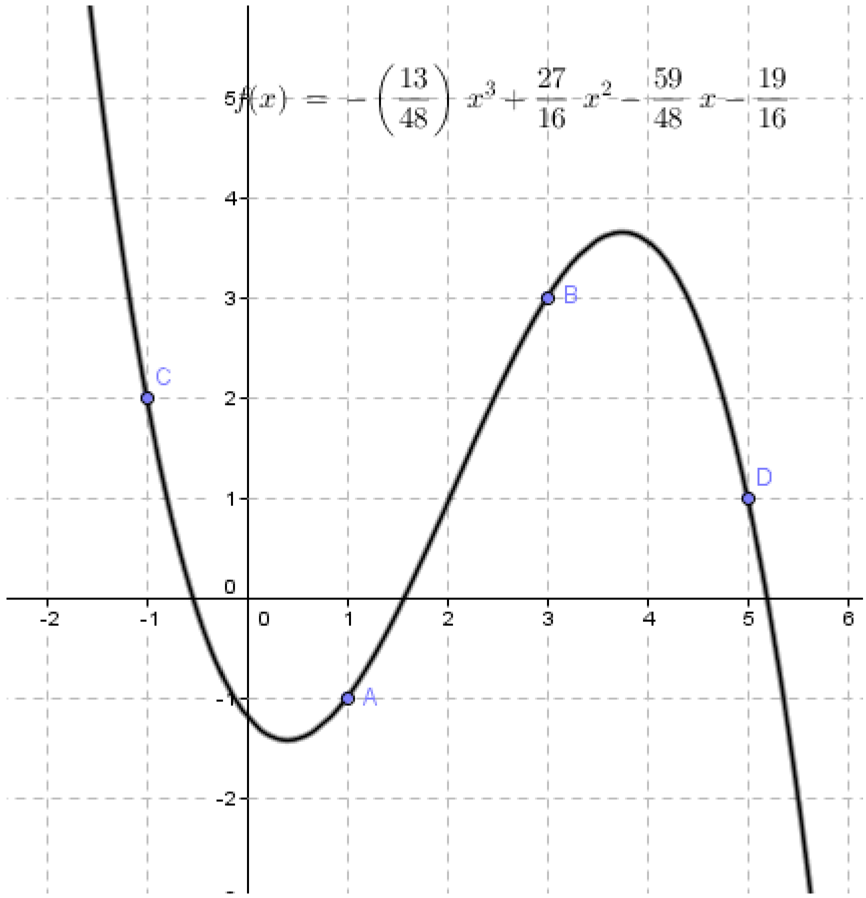
Si A est inversible alors la solution (S) est la matrice obtenue par le calcul de $A^{-1}B$.



On trouve (S) = $\begin{pmatrix} -\frac{13}{48} \\ \frac{27}{16} \\ -\frac{59}{48} \\ -\frac{19}{16} \end{pmatrix}$

Conclusion : Une équation de la courbe est : $y = -\frac{13}{48}x^3 + \frac{27}{16}x^2 - \frac{59}{48}x - \frac{19}{16}$

Vérification :



Exemple2 :

Existe-t-il une courbe du second degré passant par les points A(1 ; 2), B(–1 ; 3), C(2 ; 4), D(3 ; 6) ?

Une équation est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

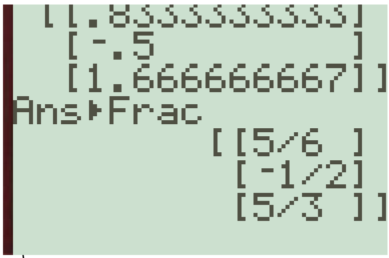
D'après les données des coordonnées des points, on obtient un système de quatre équations à **trois** inconnues a, b, c.

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=3 \\ 4a+2b+c=4 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases}$$

On ne peut pas " traduire " tout le système en une équation matricielle car le format de l'inconnue est 3×1 et la matrice carrée serait de format 4×4.

On prend donc trois des équations (sur les quatre) et on vérifiera la dernière équation " à la main ".

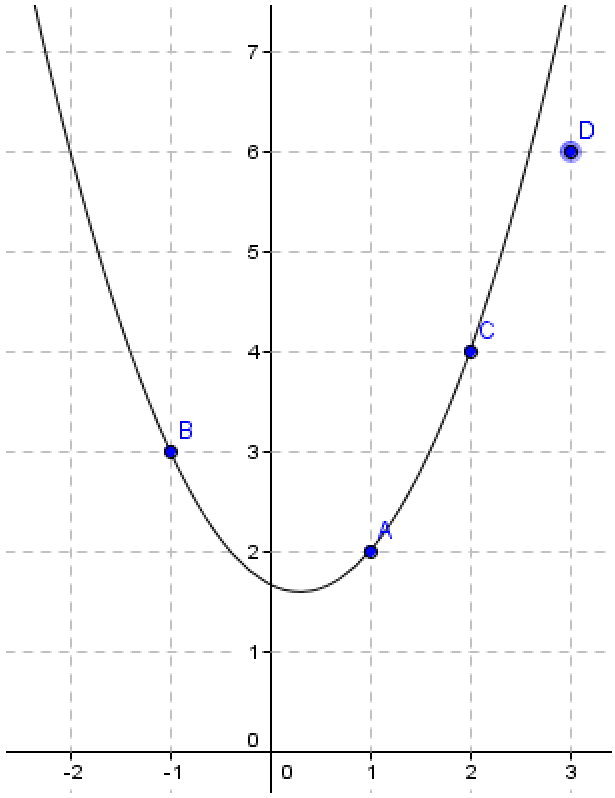
$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=3 \\ 4a+2b+c=4 \end{cases} \text{ équivaut à AX = B avec A = } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ X = } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et B = } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



En calculant A^{-1} B, on obtient : S = $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

On aurait donc : $y = \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{3}$.

Comme $\frac{5}{6} \times 9 - \frac{1}{2} \times 3 + \frac{5}{3} = \frac{45-9+10}{6} = \frac{17}{3}$ et non 6, il n'existe pas de parabole passant par ces quatre points.



IV-2 Matrices de Léontief (Modélisation d'échanges inter-industriels)