Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail. Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3		Tableau 2	
Modèle 1	8 h	10 h	14 h		Poste 1	25 €/h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h		Poste 2	20 €/h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h		Poste 3	15 €/h

1. Soit H et C les deux : matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

a. Donner la matrice produit $P = H \times C$.

b. Que représentent les coefficients de la matrice $P = H \times C$?

1) a) Calcul de P

On pose H×C …

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8\times 25+10\times 20+14\times 15 \\ 6\times 25+6\times 20+10\times 15 \\ 12\times 25+10\times 20+18\times 15 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 610 \\ 420 \\ 770 \end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient : $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 610 \\ 420 \\ 770 \end{pmatrix}$, donc, P = $\begin{pmatrix} 610 \\ 420 \\ 770 \end{pmatrix}$.

1) b) ***Rappel sur le produit de matrices :***

i et *j* sont des entiers de 1 à 3.
Un coefficient h_{ij} de la matrice H donne le nombre d'heures pour le modèle n°*i* pour le poste n°*j*.

Un coefficient $c_{j,1}$ de la matrice C donne le coût horaire par poste n°*j*.

Un coefficient P_{i1} de la matrice P est obtenu en faisant la somme des produits $h_{ij} \times c_{j,1}$ pour *j* variant de 1 à 3, on multiplie donc le nombre d'heures sur un poste par le coût horaire de ce poste.

La somme donne le coût total pour un modèle.

Les coefficients de la matrice P représentent le coût total de production (prix de revient) de chacun des modèles :

le coût de production du modèle 1 est 610 €, celui du modèle 2 est 420 €, et, celui du modèle 3 est 770 €.

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

Modèle 1 : 500 € ; Modèle 2 : 350 € ; Modèle 3 : 650 €

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.

a. Montrer que les réels a, b et c doivent être solutions du système

$$H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}.$$

b. Déterminer les réels a, b et c.

2) a)

Dans cette question 2/, les données sont les suivantes :

Nombre d'heures par modèle et par poste			
	Poste 1	Poste 2	Poste 3
Modèle 1	8 h	10 h	14 h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h
Modèle 3	12h	10 h	18 h

Coût horaire par poste	
Poste 1	a
Poste 2	b
Poste 3	c

Prix de revient	
Modèle 1	500 €
Modèle 2	350 €
Modèle 3	650 €

d'après ces données du 2, a, b et c sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 8a+10b+14c=500 \\ 6a+6b+10c=350 \\ 12a+10b+18c=650 \end{cases}$$

En posant H = $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et R = $\begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$, ce système est équivalent à l'équation matricielle :

H×X = R

2) b) En admettant que H est une matrice inversible, cette équation possède une et une seule solution :

X = $H^{-1} \times R$ où H^{-1} est la matrice inverse de H.

La calculatrice donne : X = $\begin{pmatrix} 25 \\ 12{,}5 \\ 12{,}5 \end{pmatrix}$.

Conclusion : a = 25 €/h, b = 12,5 e/h et c = 12,5 €/h

Partie B

La façade du magasin dans lequel sont commercialisées les planches est illuminée par un très grand nombre de spots qui sont programmés de la manière suivante :

- les spots s'allument tous à 22 heures ;
- toutes les 10 secondes à partir de 22 heures, et ce de manière aléatoire, 30 % des spots allumés s'éteignent et 50 % de ceux qui sont éteints se rallument.

On note : A l'état : « le spot est allumé » et E l'état : « le spot est éteint ».

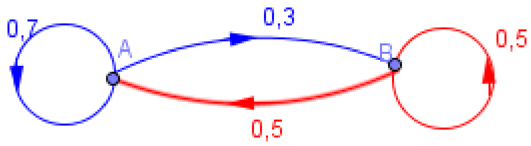
1. **a.** Dessiner un graphe probabiliste traduisant la situation.

   b. Recopier et compléter la matrice de transition (dans l'ordre A, E) associée au graphe, $M = \begin{pmatrix} \cdots & 0,3 \\ 0,5 & \cdots \end{pmatrix}$.

1 a) Par lecture des données : $P_A(E) = 0,3$ et $P_E(A) = 0,5$

on a donc : $P_A(A) = 1 - 0,3 = 0,7$ et $P_E(E) = 1 - 0,5 = 0,5$.

Ce qui peut se traduire par le graphe probabiliste suivant :



b) la matrice de transition est par conséquent :

$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

2. On note n le nombre d'étapes (c'est à dire d'intervalles de temps de 10 secondes) qui s'écoulent à partir de 22 heures et $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état d'un spot à l'étape n, où a_n est la probabilité qu'il soit allumé et b_n la probabilité qu'il soit éteint.

   On a alors, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.

   a. Justifier que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Écrire une relation entre P_0 et P_n.

   b. Déterminer les coefficients de la matrice P_3. Quelle est la probabilité que le spot considéré soit éteint à 22 heures et 30 secondes ?

2 a) À 22 heures, tous les spots sont allumés (donc tous sont éteints).

On a donc : $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

Pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$, d'où, $P_n = P_0 \times M^n$

(**Rappel** : n est le nombre d'étapes.

Pour passer d'une étape k à la suivante $k+1$, on multiplie l'état probabiliste P_k par la matrice M.

De 0 à n, il y a n étapes, donc, on multiplie par n facteurs M.

$$P_n = P_0 \times \overbrace{M \times M \times .. \times M}^{n \text{ fois}} = P_0 \times M^n \text{)}$$

2) b) $P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,312 \end{pmatrix}$

Comme 30 = 3×10, à 22 heures 30 secondes, la probabilité qu'un spot soit éteint est de 31,2 %.

3. Déterminer l'état stable $(a \quad b)$ du graphe probabiliste.

3) On cherche $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ et $a + b = 1$.

On obtient le système suivant : $\begin{cases} 0,7a + 0,5b = a \\ 0,3a + 0,5b = b \\ a + b = 1 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$

Les deux premières lignes sont équivalentes à l'équation : $0,3a - 0,5b = 0$,
soit : $3a = 5b$

d'où, le système suivant : $\begin{cases} 3a = 5b \\ a + b = 1 \end{cases}$ qui mène à $a = \dfrac{5}{8}$ et $b = \dfrac{3}{8}$.

L'état stable est P = $\begin{pmatrix} \dfrac{5}{8} & \dfrac{3}{8} \end{pmatrix}$

Remarques et commentaires :

À long termes, la probabilité qu'un spot soit allumé (resp . éteint) est $\dfrac{5}{8}$ = 0,625 (resp . $\dfrac{3}{8}$ = 0,375).

Si on cherche M^{100} (par exemple) à la calculatrice, on retrouve ces coefficients qui sont les limites quand n tend vers +∞ des probabilités a_n et b_n)