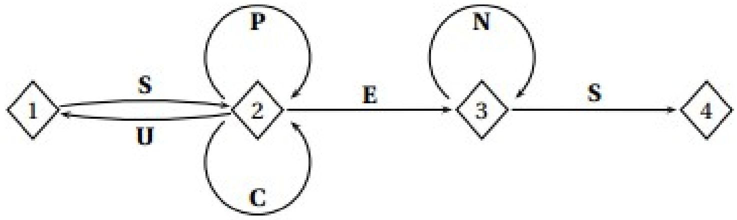
## Exercice 1

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

**Partie A**

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :




Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe.

   SUCCES SCENES SUSPENS

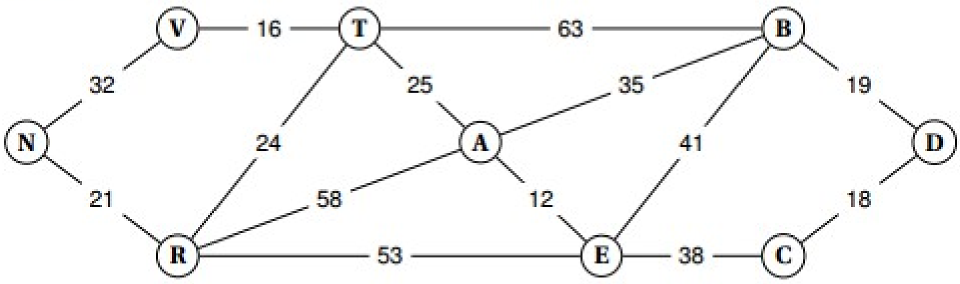
2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3. Avec une calculatrice on a calculé : $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes ?

**Partie B**




Antoine décide d'aller visiter neuf châteaux de la Loire.
Il a construit le graphe ci-dessus où les sommets représentent :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A : Amboise | B : Blois | C : Cheverny | D : Chambord |
| E : Chenonceau | T : Tours | V : Villandry | R : Azay-le-Rideau |
| N : Chinon | | | |

Sur les arêtes sont indiquées les distances en km

1. Antoine peut-il partir de Blois et y revenir, en parcourant une et une seule fois chacune des routes matérialisées par les arêtes de ce graphe ? On justifiera la réponse.
2. Déterminer le plus court chemin pour aller du château de Chambord au château de Chinon. On donnera le parcours ainsi que le nombre total de kilomètres.

**Exercice 2**

Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnements : l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives et l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au saune, au hammam et au jacuzzi. Chaque adhérent doit choisir un des deux abonnements.
La première année, en 2010, 80 % des adhérents ont choisi l'abonnement de type A. On considère ensuite que 30 % des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement pour l'année suivante, tandis que 10 % des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement pour l'année suivante.
Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 0.
On note $a_n$ la proportion des adhérents ayant un abonnement de type A l'année $2010+n$.
On note $b_n$ la proportion des adhérents ayant un abonnement de type B l'année $2010+n$.
Enfin on note enfin $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

1. Déterminer $P_0$.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. Écrire la matrice de transition M associée à cette situation.
4. Déterminer la matrice $P_2$. En déduire la probabilité pour qu'en 2012 un adhérent choisisse l'abonnement de type A.
5. Montrer que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 0, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,1$.
6. Pour toute entier $n$ supérieur ou égal à 0, on pose $u_n = 4a_n - 1$.
   Montrer que la suite $(u_n)$ est géométrique de raison 0,6. Préciser son premier terme.
7. Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 0, exprimer $u_n$ en fonction de $n$. En déduire $a_n$ en fonction de $n$.
8. Calculer la limite de la suite $(a_n)$ puis interpréter concrètement ce résultat.

***Exercice 3***

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à $10^{-2}$ près.

Cet exercice consiste à étudier la propagation d'une information d'une personne à l'autre, thème souvent abordé en sciences sociales. Cette information se transmet avec un risque d'erreur, c'est-à-dire avec une probabilité de propagation de l'information contraire.

Dans cet exercice, on considère l'information suivante, notée E : « Paul a réussi son examen ».

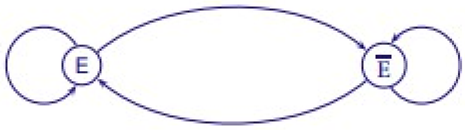
**Partie A : Propagation symétrique ( de type « neutre »)**

Dans cette partie, on suppose que, pour une information reçue (E ou $\overline{E}$), la probabilité de communiquer cette information à l'identique vaut 0,9 et la probabilité de relayer l'information contraire vaut 0,1.

On note $p_n$ la probabilité de recevoir l'information E au bout de $n$ étapes ($n$ étant le nombre de personnes ayant transmis l'information) et on note $q_n$ la probabilité de recevoir l'information $\overline{E}$ au bout de $n$ étapes.

On suppose que Paul a réussi son examen, on pose $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Recopier puis compléter le graphe probabiliste relatif à la propagation de l'information suivant :




2. Préciser la matrice de transition M telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$M.
3. À l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier naturel $n$ tel que $p_n < 0,8$.
4. Déterminer par le calcul, l'état stable.

**Partie B : Propagation asymétrique (de type « rumeur »)**

Dans cette partie, on suppose toujours que la probabilité de transmission correcte de l'information E est égale à 0,9. Toutefois, il circule la fausse rumeur $\overline{\text{E}}$. Dans ces conditions, on suppose que si l'information reçue est $\overline{\text{E}}$, la probabilité de transmettre cette information $\overline{\text{E}}$ est égale à 1.

On suppose de nouveau que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Préciser la matrice de transition $N$ telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} N$.
3. Montrer que $p_{n+1} = 0,9p_n$. Quelle est la nature de la suite $(p_n)$ ?
4. Exprimer $p_n$ en fonction de $n$.
5. Trouver par le calcul, le plus petit entier naturel $n$ tel que $p_n < 0,5$.
6. Déterminer la limite de $(p_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ puis interpréter le résultat obtenu.

## *Exercice 4*

*Les parties A et B sont indépendantes*

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.
Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90 % du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.
Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.
On observe à partir de 2010 que chaque année, 15 % des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10 % des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A.
Pour tout entier naturel $n$, on note $a_n$ la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année $2010 + n$, et $b_n$, la probabilité pour que son fournisseur d'accès en $2010 + n$ soit l'entreprise B.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$ et on a ainsi $a_0 = 0,9$ et $b_0 = 0,1$.

**PARTIE A**

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. **a.** Déterminer la matrice de transition $M$ de ce graphe.
   **b.** Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ $\begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$.
   **c.** Déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des clients des entreprises A et B. Interpréter le résultat.

**PARTIE B**

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.
À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.
On cherche le nombre $s$ de stylos et le nombre $c$ de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ et $X$ et $T$ sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

### *Exercice 5*

Pour jouer sur internet à un certain jeu la souscription d'un abonnement annuel est obligatoire.
À partir d'un sondage, on prévoit que :

— 80 % des abonnés renouvellent chaque année leur abonnement,
— le nombre de nouveaux abonnés sera de 20 000 tous les ans.

1. Au premier janvier 2012, on comptait 50 000 abonnés à ce jeu en ligne.
   Selon ce modèle, justifier qu'au premier janvier 2013 le nombre d'abonnés sera égal à 60 000.
2. **a.** Justifier que le nombre d'abonnés au premier janvier de l'année $2012 + n$ est modélisé par la suite $(a_n)$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 50000 \\ a_{n+1} = 0,8a_n + 20000 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

   **b.** Calculer $a_2$ et $a_3$.

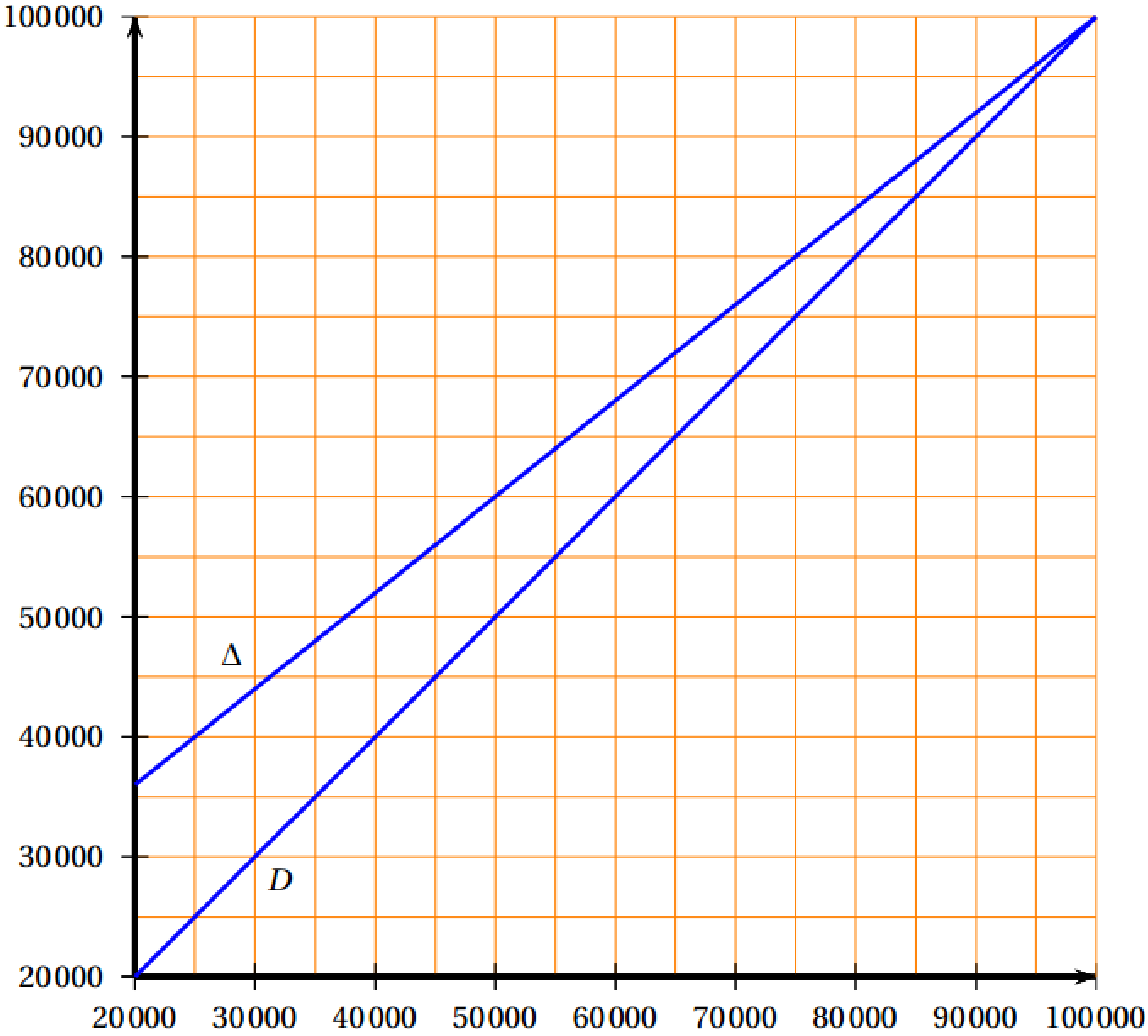
   **c.** Sur le graphique situé en annexe, à rendre avec la copie, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal les droites $D$ d'équation $y = x$ et $\Delta$ d'équation $y = 0,8x + 20000$.
   Sur l'axe des abscisses, représenter $a_0$ puis construire $a_1, a_2, a_3, a_4$ en utilisant les représentations graphiques des deux droites précédentes.
   Laisser apparents les traits de construction.

   **d.** En s'appuyant sur une observation graphique, émettre une conjecture sur la limite de la suite $(a_n)$.
3. On admet que pour tout nombre entier naturel $n$, $a_n = 100000 - 50000 \times 0,8^n$.

   **a.** Déterminer la limite de la suite $(a_n)$.

   **b.** *Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   En utilisant ce modèle, donner une estimation de l'année à partir de laquelle, au premier janvier, le nombre d'abonnés à ce jeu sera supérieur à 95 000.

**Annexe**


100000
90000
80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
Δ
D
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000
90000
100000