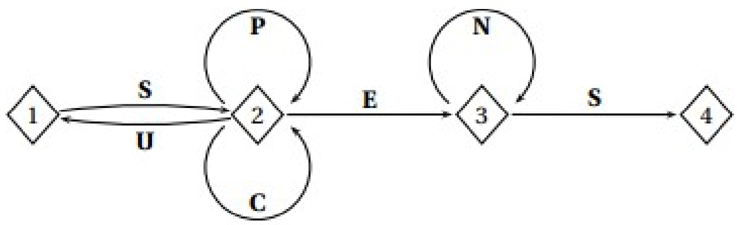
Exercice 1

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe.

   SUCCES SCENES SUSPENS

2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3. Avec une calculatrice on a calculé : $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes ?

Correction : Bac Asie juin 2013

Partie A :

1) SUCCES NON (après SU, il faut à nouveau S)

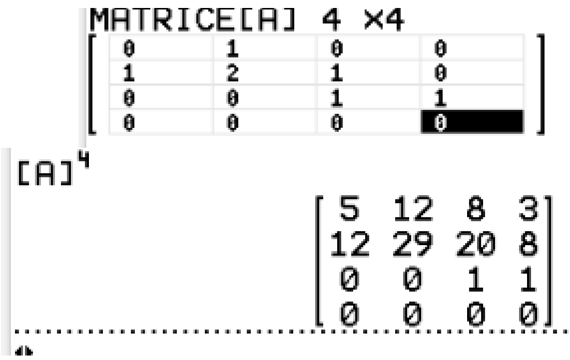
SCENES NON (après SCEN , il faut N ou S)

SUSPENS OUI

2) Matrice : Chaque coefficient a_{ij} indique le nombre d'arêtes orientés de *i* vers *j*.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



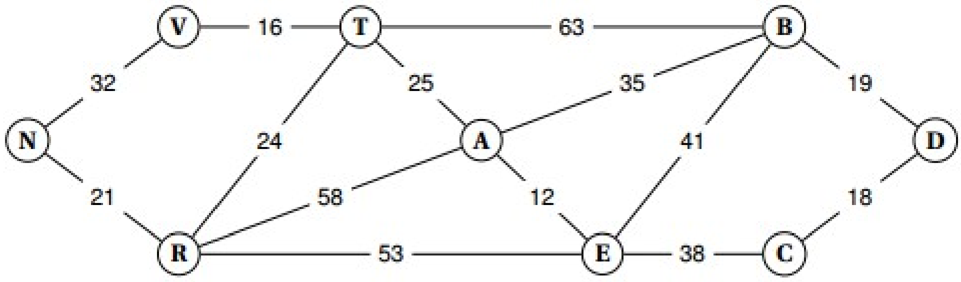
Un code est une chaîne partant de " 1 " et arrivant à " 4 ".

Le coefficient $b_{1,4}$ de A^4 indique le nombre de chaînes de longueur 4 de " 1 " à " 4 ".

On a donc : 3 codes de longueur 4 qui sont :

SPES, SCES et SENS

Partie B



Antoine décide d'aller visiter neuf châteaux de la Loire.
Il a construit le graphe ci-dessus où les sommets représentent :

A : Amboise	B : Blois	C : Cheverny	D : Chambord
E : Chenonceau	T : Tours	V : Villandry	R : Azay-le-Rideau
N : Chinon			

Sur les arêtes sont indiquées les distances en km

1. Antoine peut-il partir de Blois et y revenir, en parcourant une et une seule fois chacune des routes matérialisées par les arêtes de ce graphe ? On justifiera la réponse.
2. Déterminer le plus court chemin pour aller du château de Chambord au château de Chinon. On donnera le parcours ainsi que le nombre total de kilomètres.

Partie B :

1) Un chemin partant de Blois et y revenant en parcourant une et une seule fois chacune des routes est un cycle Eulérien.

D'après le théorème d'Euler un tel cycle existe si et seulement si tous les degrés des sommets sont pairs.

On cherche donc ces degrés :

Sommets	A	B	C	D	E	T	V	R	N
degrés	4	4	2	2	4	4	2	4	2

Un tel chemin existe.

Complément : le nombre d'arêtes est $\frac{4+4+2+2+4+4+2+4+2}{2} = 14$

Un cycle eulérien, par exemple : B-D-C-E-R-T-V-N-R-A-T-B-E-A-B (on a bien 14 arêtes)

2) Pour déterminer le plus court chemin, on applique l'algorithme de Djikstra

Chambord : lettre D

Chinon : lettre N

D	A	B	C	E	T	V	R	N	On retient:
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	D
	∞	19 (D)	18 (D)	∞	∞	∞	∞	∞	C
	∞	19 (D)		56 (C)	∞	∞	∞	∞	B
	54 (B)			~~19+41 (B)~~ 56 (C)	82 (B)	∞	∞	∞	A
				~~54+12(A)~~ 56(C)	79(A)	∞	112(A)	∞	E
					79(A)	∞	109 (E)	∞	T
						95(T)	103(T)	∞	V
							103(T)	127 (V)	R
								124 (R)	N

Le chemin le plus court fait 124 km. (On remonte N-R-T-A-B-D)

D (Chambord)- B (Blois)- A (Amboise)- T(Tours)- R (Azay-le-Rideau)- N (Chinon)

Exercice 2

Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnements : l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives et l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au saune, au hammam et au jacuzzi. Chaque adhérent doit choisir un des deux abonnements.

La première année, en 2010, 80 % des adhérents ont choisi l'abonnement de type A. On considère ensuite que 30 % des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement pour l'année suivante, tandis que 10 % des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement pour l'année suivante.

Soit n un entier supérieur ou égal à 0.

On note a_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type A l'année $2010+n$.

On note b_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type B l'année $2010+n$.

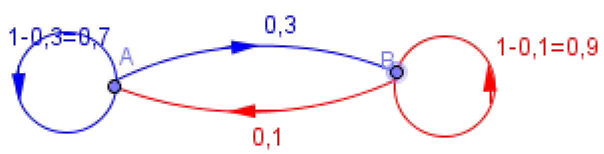
Enfin on note enfin $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

1. Déterminer P_0.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. Écrire la matrice de transition M associée à cette situation.
4. Déterminer la matrice P_2. En déduire la probabilité pour qu'en 2012 un adhérent choisisse l'abonnement de type A.
5. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 0, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,1$.
6. Pour toute entier n supérieur ou égal à 0, on pose $u_n = 4a_n - 1$.
   Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,6. Préciser son premier terme.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, exprimer u_n en fonction de n. En déduire a_n en fonction de n.
8. Calculer la limite de la suite (a_n) puis interpréter concrètement ce résultat.

Correction (Amérique du Nord : mai 2012)

1) D'après l'énoncé **:** $P_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 1-0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$

2) Comme $P_A(B)=0,3$ et que $P_B(A)=0,1$, on a le graphe probabiliste suivant:



3) La matrice de transition associée à ce graphe est par conséquent: M = $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

4) $P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,448 & 0,552 \end{pmatrix}$

L'année 2012 (2010+ 2), 44,8% des adhérents choisissent l'abonnement de type A.

5) Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, on a: $P_{n+1} = P_n \times M$,

soit: $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

On obtient donc le système suivant: $\begin{cases} : a_{n+1} = 0{,}7 \times a_n + 0{,}1 \times b_n \\ b_{n+1} = 0{,}3 \times a_n + 0{,}9 \times b_n \end{cases}$,

Or, comme $a_n + b_n = 1$, de la première ligne, on tire: $a_{n+1} = 0{,}7\, a_n + 0{,}1(1 - a_n) = 0{,}6\, a_n + 0{,}1$

6) Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, on pose: $u_n = 4\, a_n - 1$

On a successivement: $u_{n+1} = 4\, a_{n+1} - 1$

$$u_{n+1} = 4(0{,}6\, a_n + 0{,}1) - 1$$
$$u_{n+1} = 0{,}6 \times 4\, a_n + 0{,}4 - 1$$
$$u_{n+1} = 0{,}6 \times 4\, a_n - 0{,}6$$
$$u_{n+1} = 0{,}6(4\, a_n - 1)$$
$$u_{n+1} = 0{,}6 \times u_n$$

La suite (u_n) est donc une s*g* de raison 0,6 et de premier terme $u_0 = 4\, a_0 - 1 = 4 \times 0{,}8 - 1 = 2{,}2$

7) Par propriété des suites géométriques, on obtient: $u_n = 2{,}2 \times 0{,}6^n$,

puis, $a_n = \dfrac{u_n + 1}{4} = \dfrac{2{,}2 \times 0{,}6^n + 1}{4} = 0{,}55 \times 0{,}6^n + 0{,}25$

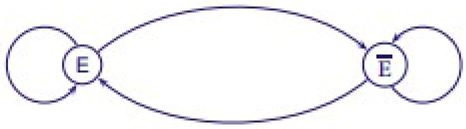
8) Comme $-1 < 0{,}6 < 1$, on sait que: $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}6^n = 0$, et, donc, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}25$.

À terme, la proportion de clients choisissant l'abonnement A vaut 0,25.

Un quart des adhérents choisissent à terme l'abonnement A.

Exercice 3

1. Recopier puis compléter le graphe probabiliste relatif à la propagation de l'information suivant :



2. Préciser la matrice de transition M telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} M$.
3. À l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,8$.
4. Déterminer par le calcul, l'état stable.

Partie B : Propagation asymétrique (de type « rumeur »)

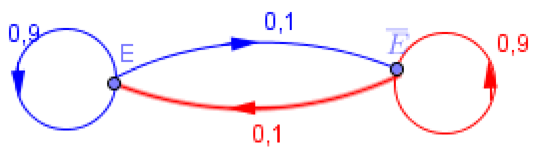
Dans cette partie, on suppose toujours que la probabilité de transmission correcte de l'information E est égale à 0,9. Toutefois, il circule la fausse rumeur $\overline{E}$. Dans ces conditions, on suppose que si l'information reçue est $\overline{E}$, la probabilité de transmettre cette information $\overline{E}$ est égale à 1.

On suppose de nouveau que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Préciser la matrice de transition N telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} N$.
3. Montrer que $p_{n+1} = 0,9p_n$. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
4. Exprimer p_n en fonction de n.
5. Trouver par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,5$.
6. Déterminer la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$ puis interpréter le résultat obtenu.

Correction
PARTIE A: Propagation symétrique

1) D'après le texte, $P_E(E) = 0,9$, $P_E(\overline{E}) = 0,1$, $P_{\overline{E}}(\overline{E}) = 0,9$ et $P_{\overline{E}}(E) = 0,1$.



2) La matrice de transition M définie par $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ M est M = $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

3) On peut calculer successivement $P_1 = P_0 \times \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$

$$P_2 = P_1 \times \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,82 & 0,18 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 \times \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,82 & 0,18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,756 & 0,244 \end{pmatrix}$$

en utilisant la fonction « rep » de la calculatrice après avoir entré: A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

On fait: [A] Enter, puis: rep*[B] enter, enter, enter …..

Le plus petit entier n tel que $p_n < 0{,}8$ est donc $n = 3$

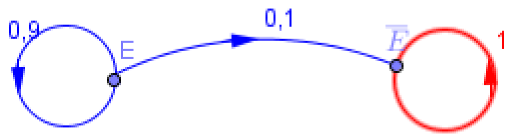
4) L'état stable est la matrice P = $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \times$M.

On a le système suivant: $\begin{cases} 0{,}9\,p+0{,}1\,q=p \\ 0{,}1\,p+0{,}9\,q=q \\ p+q=1 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$.

Les deux premières lignes sont équivalentes et donne l'égalité $0{,}1\,p=0{,}1\,q$, soit: $p = q$.
Puisque $p = q$ et $p + q = 1$, l'état stable P est P = $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

PARTIE B: Propagation asymétrique

1) Dans ce nouveau graphe $P_{\overline{E}}(\overline{E}) = 1$ et donc $P_{\overline{E}}(E) = 0$



2) La matrice de transition N définie par $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times$N est N = $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Le calcul $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne: $\begin{cases} p_{n+1}=0{,}9\,p_n+0\times q_n \\ q_{n+1}=0{,}1\,p_n+1\times q_n \end{cases}$,
d'où: $p_{n+1} = 0{,}9\,p_n$.

La suite (p_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $p_0 = 1$.

4) Par propriété des suites géométriques, on a: $p_n = p_0 \times 0{,}9^n = 0{,}9^n$.

5) $p_n < 0{,}5$ si et seulement si $0{,}9^n < 0{,}5$
La fonction logarithme népérien étant strictement croissante, on a:
$p_n < 0{,}5$ si et seulement si $\ln 0{,}9^n < \ln 0{,}5$.
Or, $\ln 0{,}9^n = n \times \ln 0{,}9$ et comme $0 < 0{,}9 < 1$, $\ln 0{,}9 < 0$.
On obtient: $p_n < 0{,}5$ si et seulement si $n > \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9}$

Comme $\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}6$, le plus petit entier naturel tel que $p_n < 0{,}5$ est $n = 7$.

6) Comme $-1 < 0{,}9 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$, soit: $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$

Sur le long terme, seule la fausse rumeur est transmise.

Exercice 4

Les parties A et B sont indépendantes

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.
Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90 % du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.
Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.
On observe à partir de 2010 que chaque année, 15 % des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10 % des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année $2010+n$, et b_n, la probabilité pour que son fournisseur d'accès en $2010+n$ soit l'entreprise B.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$ et on a ainsi $a_0 = 0,9$ et $b_0 = 0,1$.

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

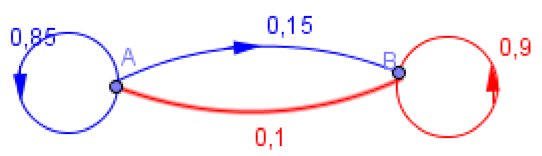
2. **a.** Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.

b. Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ $\begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$.

c. Déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des clients des entreprises A et B. Interpréter le résultat.

Correction: (Polynésie juin 2013)

1) D'après les données: $P_A(B) = 0,15$ et $P_B(A) = 0,10$ d'où le graphe probabiliste suivant:



2 a) La matrice M définie par $P_{n+1} = P_n \times M$ est M = $\begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

b) On sait que en 2010, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$, d'où, en 2013 = 2010 + 3, $P_3 = P_0 \times M$

Le calcul: $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0,6109375 & 0,3890625 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$

c) L'état stable P = $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ est la solution du système $\begin{cases} P = P \times M \\ a+b=1 \end{cases}$.

On a donc: $\begin{cases} 0,85a+0,1b=a \\ 0,15a+0,9b=b \\ a+b=1 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$

Les deux premières sont équivalentes à $0,15a - 0,1b = 0$, d'où, le système: $\begin{cases} 0,15a-0,1b=0 \\ b=1-a \end{cases}$

On en tire: $0,15a - 0,1\times(1-a) = 0$ $\quad a = \dfrac{0,1}{0,25} = 0,4$ et $b = 0,6$.

À terme, 40% des internautes sont clients de A et 60% sont clients de B.

PARTIE B

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.
À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.
On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}8 & 1{,}2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

1) D'après l'énoncé : l'entreprise a distribué 550 objets, soit : $s + c = 550$
et cela lui a coûté 540€, soit : $0{,}8s + 1{,}2c = 540$

On a donc le système : $\begin{cases} s + c = 550 \\ 0{,}8\,s + 1{,}2\,c = 540 \end{cases}$.

2) Soit R = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}8 & 1{,}2 \end{pmatrix}$

On pose X = $\begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}$ et T = $\begin{pmatrix} 550 \\ 540 \end{pmatrix}$, on a : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}8 & 1{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times s + 1 \times c \\ 0{,}8 \times s + 1{,}2 \times c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 550 \\ 540 \end{pmatrix}$.

L'égalité a lieu si et seulement si $\begin{cases} s + c = 550 \\ 0{,}8\,s + 1{,}2\,c = 540 \end{cases}$.

Le système est donc équivalent à l'équation matricielle : R×X = T

3) Comme le déterminant de R est : dét(R) = $1 \times 1{,}2 - 1 \times 0{,}8$ = 0,4 et que ce déterminant est différent de 0, la matrice R est inversible, et, en multipliant chaque membre à gaucha par R^{-1}, on a :
X = $\mathrm{R}^{-1} \times \mathrm{T}$

On trouve X = $\begin{pmatrix} 300 \\ 250 \end{pmatrix}$.

L'entreprise a distribué 300 stylos et 250 porte-clés.

Exercice 5

Pour jouer sur internet à un certain jeu la souscription d'un abonnement annuel est obligatoire.
À partir d'un sondage, on prévoit que :

— 80 % des abonnés renouvellent chaque année leur abonnement,
— le nombre de nouveaux abonnés sera de 20 000 tous les ans.

1. Au premier janvier 2012, on comptait 50 000 abonnés à ce jeu en ligne.
Selon ce modèle, justifier qu'au premier janvier 2013 le nombre d'abonnés sera égal à 60 000.

2. a. Justifier que le nombre d'abonnés au premier janvier de l'année $2012 + n$ est modélisé par la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0 & = & 50000 \\ a_{n+1} & = & 0,8a_n + 20000 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

b. Calculer a_2 et a_3.

c. Sur le graphique situé en annexe, à rendre avec la copie, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal les droites D d'équation $y = x$ et Δ d'équation $y = 0,8x + 20000$.
Sur l'axe des abscisses, représenter a_0 puis construire a_1, a_2, a_3, a_4 en utilisant les représentations graphiques des deux droites précédentes.
Laisser apparents les traits de construction.

d. En s'appuyant sur une observation graphique, émettre une conjecture sur la limite de la suite (a_n).

3. On admet que pour tout nombre entier naturel n, $a_n = 100000 - 50000 \times 0,8^n$.

a. Déterminer la limite de la suite (a_n).

b. *Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
En utilisant ce modèle, donner une estimation de l'année à partir de laquelle, au premier janvier, le nombre d'abonnés à ce jeu sera supérieur à 95 000.

Correction : (métropole juin 2012)

1) Au 1er janvier 2012 : 50 000 abonnés,
au 1er janvier 2013, on aura : 0,8×50 000 + 20 000 = 60 000 abonnés.

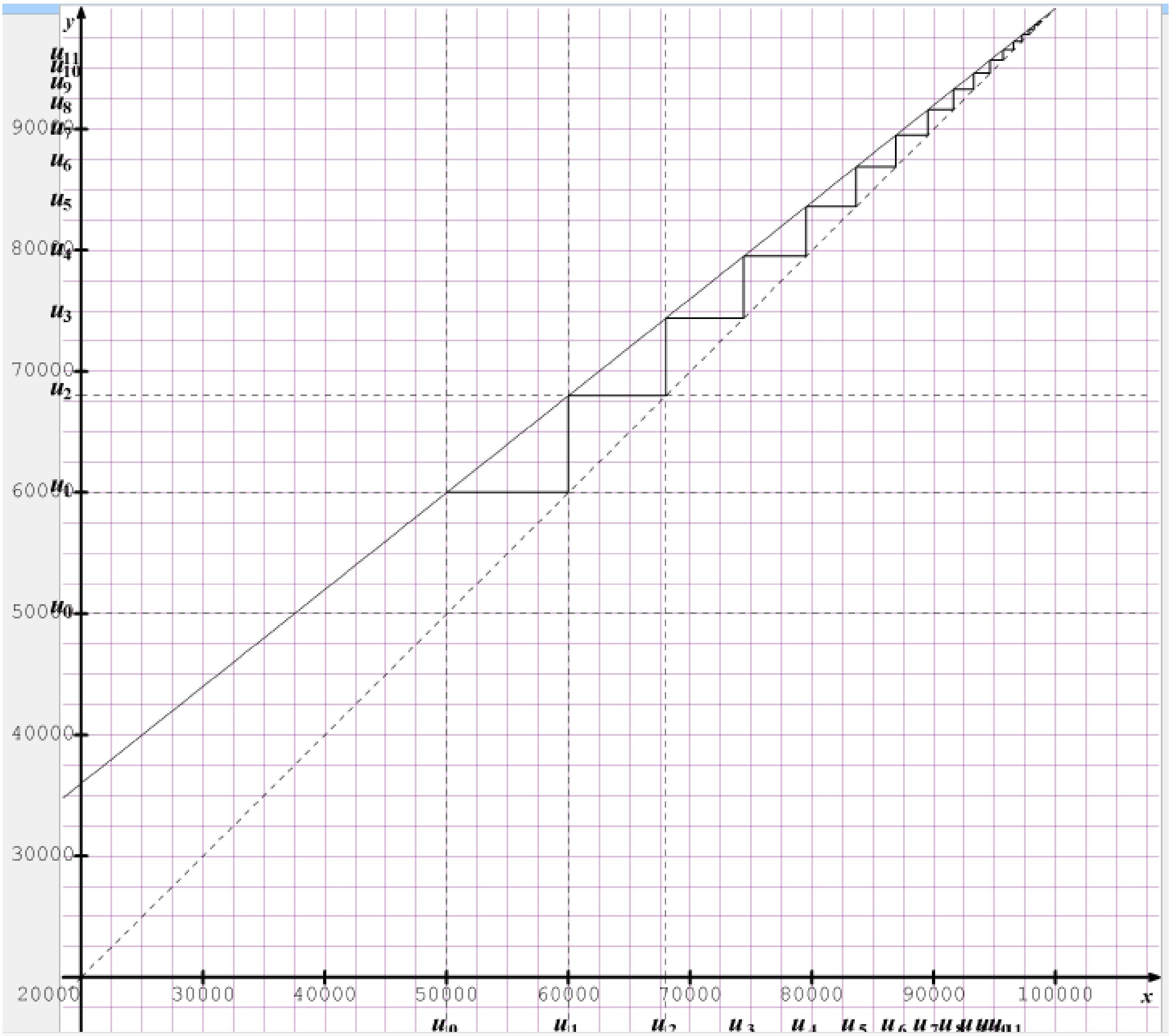
2) a) Soit a_n le nombre d'abonnés au 1er janvier de l'année 2012 + *n*.
80% renouvellent leur abonnement, soit : $0,8 a_n$ auxquels s'ajoutent 20 000 nouveaux abonnés.

Au 1er janvier de l'année 2012 + (*n* + 1), on a donc : $a_{n+1} = 0,8 a_n + 20000$

Comme au départ, on a 50 000 abonnés, la suite (a_n) est définie par le système : $\begin{cases} a_0 = 50000 \\ a_{n+1} = 0,8 a_n + 20000 \end{cases}$

b) a_0 = 50 000, a_1 = 60 000, a_2 = 0,8×60 000+20 000 = 68 000, a_3 = 0,8×68 000 + 20 000 = 78 800

c) Voir graphique
Comme l'équation de Δ est *y* = 0,8*x* + 20 000, en plaçant a_n en abscisse, on lit a_{n+1} en ordonnée.
D'autre part, comme l'équation de D est *y* = *x*, l'ordonnée d'un point de D est l'abscisse de ce point … d'où, le report de a_{n+1} et ainsi de suite.



d) Conjecture : la suite (a_n) converge vers 100 000

3) On admet, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 100\,000 - 50000 \times 0{,}8^n$

a) Comme $-1 < 0{,}8 < 1$, on sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$, d'où, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 100\,000$

b) En entrant sur la calculatrice la fonction : 100000-50000*0,8^X et en faisant un tableau de valeurs de 1 en 1, on lit :

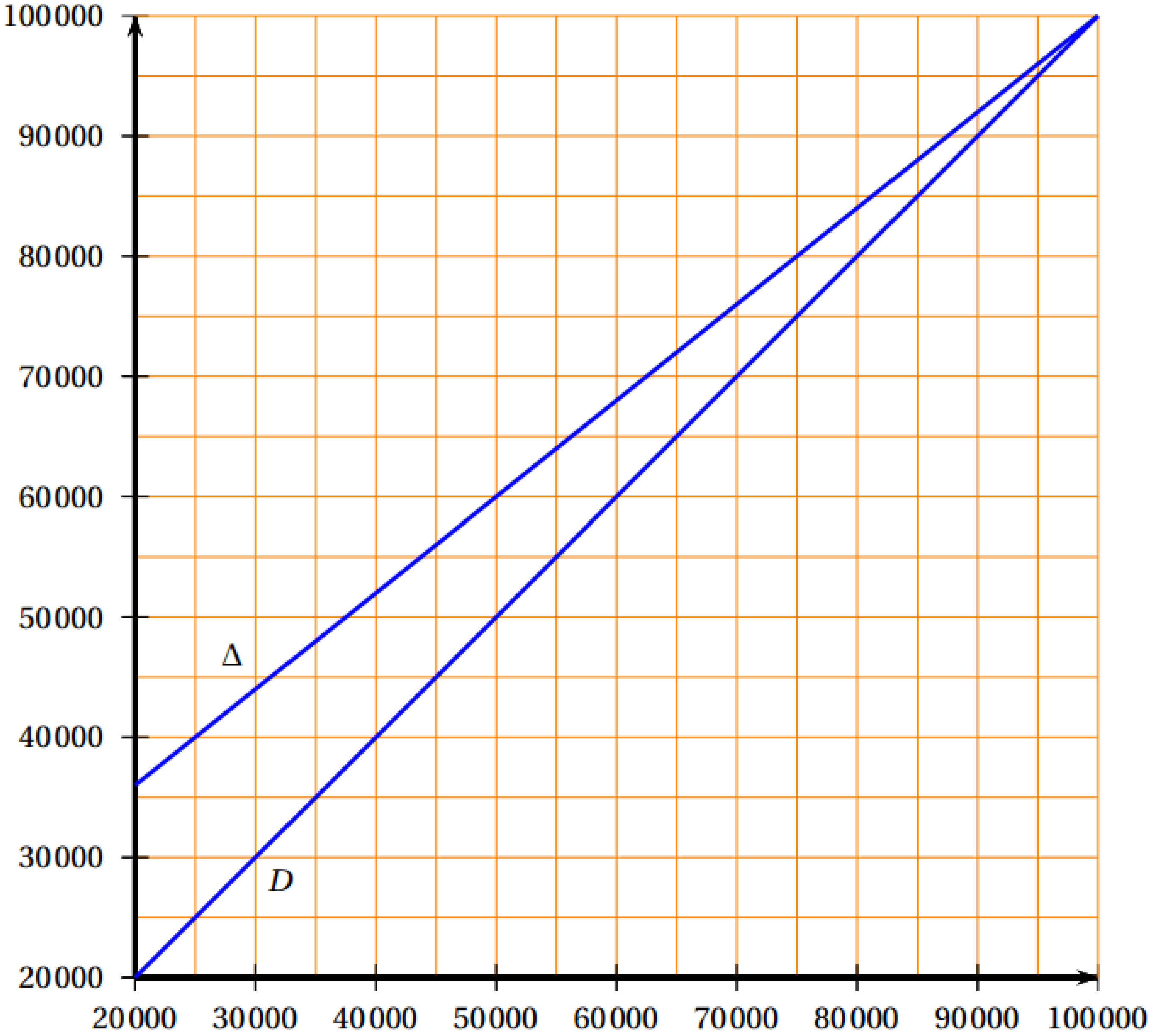
X	Y1
7	89514
8	91611
9	93289
10	94631
11	95705
12	96564
13	97251
14	97801
15	98241
16	98593
17	98874

$a_{10} = 94\,631$ et $a_{11} = 95\,705$

Comme $0 < 0{,}8 < 1$, la suite $(0{,}8^n)$ est décroissante.
En multipliant par –50000 qui est négatif, $-\ 50000 \times 0{,}8^n$ est croissante et en ajoutant 100 000, la suite (a_n) est croissante.

Au 1er janvier 2012 + 11 = 2023, le nombre d'abonnés dépasse 95 000.

Annexe


100 000
90 000
80 000
70 000
60 000
50 000
40 000
30 000
20 000
Δ
D
20 000
30 000
40 000
50 000
60 000
70 000
80 000
90 000
100 000