Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

Index

I- Quelques rappels sur les systèmes linéaires:

I-1- Définition d'un système linéaire :

Un système est dit linéaire lorsque les inconnues sont du premier degré (ou de degré nul).
Il ne peut pas y avoir de produits entre les inconnues, d'inverse d'une inconnue, de racine carrée d'une inconnue …

Exemples : $\begin{cases} x+y+\sqrt{2}z=1 \\ \sqrt{2}x-2y+3z=-3 \\ -x+\sqrt{2}y=0 \end{cases}$ est un système linéaire à trois inconnues x, y et z.

$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-4 \end{cases}$ **n'est pas** un système linéaire.

$\begin{cases} x+\sqrt{y}=0 \\ x+y=20 \end{cases}$ **n'est pas** un système linéaire.

$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ xy=\dfrac{-1}{6} \end{cases}$ **n'est pas** un système linéaire.

I-2- Quelques techniques de résolution d'un système linéaire :

I-2-1- par substitution

En isolant une inconnue dans une des équations et en remplaçant dans les autres équations, on réduit le nombre d'inconnues jusqu'à avoir une équation à une seule inconnue (qu'on sait résoudre …)

I-2-2- par combinaison linéaire :

En recherchant des coefficients (constantes) tels que la somme de deux équations " éliminent " de l'écriture une inconnue.

I-3- Illustration sur un exemple :

Soit le système (Σ) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$

Par substitution :

De la ligne (L1), on tire : $z = 5 - x - y$ et on remplace dans (L2) et (L3).

On obtient le système équivalent à (Σ) : $\begin{cases} z=5-x-y \\ x-2y+3(5-x-y)=2 \\ 2x+3y-(5-x-y)=1 \end{cases}$, soit : $\begin{cases} z=5-x-y \\ 2x+5y=13 \\ 3x+4y=6 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$

De la ligne (L2), on tire : $y = \frac{13}{5} - \frac{2}{5}x$ et on remplace dans (L3).

On obtient le système équivalent à (Σ) : $\begin{cases} z=5-x-y \\ y=\frac{13}{5}-\frac{2}{5}x \\ 3x+4\left(\frac{13}{5}-\frac{2}{5}x\right)=6 \end{cases}$, soit $\begin{cases} z=5-x-y \\ y=\frac{13}{5}-\frac{2}{5}x \\ \frac{7}{5}x=\frac{-22}{5} \end{cases}$

On a alors successivement : $x = -\frac{22}{7}$; $y = \frac{13}{5} + \frac{2\times 22}{7} = \frac{27}{7}$ et $z = 5 + \frac{22}{7} - \frac{27}{7} = \frac{30}{7}$.

Par combinaison linéaire :

On cherche par exemple à " éliminer " z .
On fait donc : 3×(L1) – (L2), ce qui donne : $3x + 3y + 3z - (x - 2y + 3z) = 3\times 5 - 2$
et (L1) + (L3), ce qui donne : $x + y + z + 2x + 3y - z = 5 + 1$

On obtient le système équivalent à (Σ) : $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+5y=13 \\ 3x+4y=6 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$

On cherche maintenant à " éliminer " y.

On fait donc : 5×(L3) – 4×(L2), ce qui donne : $15x + 20y - (8x - 20y) = 30 - 52$, soit : $x = -\frac{22}{7}$.

et/ ou on cherche à " éliminer " x en faisant : 3×L2) – 2×(L3),

ce qui donne : $6x + 15y - 6x - 8y = 3\times 13 - 2\times 6$, soit : $y = \frac{27}{7}$

En reprenant (L1), on a alors : $z = 5 + \frac{22}{7} - \frac{27}{7} = \frac{30}{7}$.

Solution :

Dans les deux cas, le triplet (x ; y ; z) solution du système (Σ) est : $\left(-\frac{22}{7};\frac{27}{7};\frac{30}{7}\right)$.

<u>II- Avec les matrices :</u>

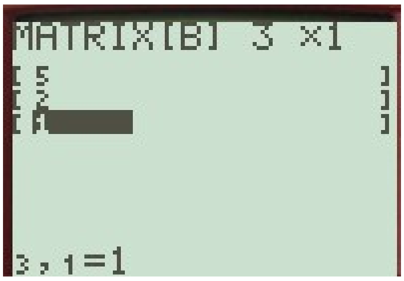
(Σ) : $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

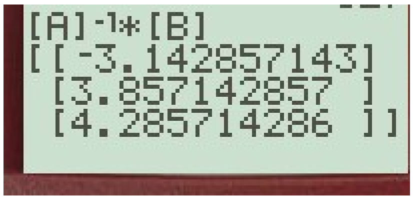
Notons A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, X la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et B la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'écriture matricielle du système (Σ) est : $AX = B$.
Si on sait trouver une matrice A' telle que $A'\times A = I_3$ (matrice identité d'ordre 3), il suffira de multiplier à gauche par A' pour obtenir le triplet solution : $S = A'\times B$.

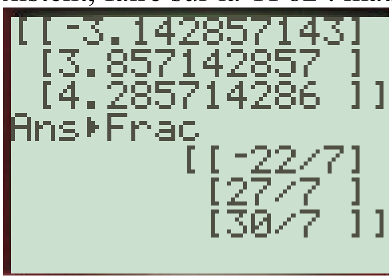
On dit que A' est la matrice inverse de A et elle est notée A^{-1}.
(La calculatrice sera utile pour tous les " gros " systèmes).

Copie d'écran de la calculatrice :





Pour les écritures fractionnaires si elles existent, faire sur la TI 82 : math-frac



III- Retour au I-

Exemples :

1) $\begin{cases} x+y+\sqrt{2}z=1 \\ \sqrt{2}x-2y+3z=-3 \\ -x+\sqrt{2}y=0 \end{cases}$ est un système linéaire à trois inconnues x, y et z.

La calculatrice ne donne que des valeurs approchées ….
alors que la solution exacte est ($\sqrt{2}$; 1 ; –1)

2) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-4 \end{cases}$ **n'est pas** un système linéaire.

Par substitution, on a : $\begin{cases} y=3-x \\ x(3-x)=-4 \end{cases}$

la deuxième équation est du second degré : $x^2 - 3x - 4 = 0$ qui a deux solutions : –1 et 4
On a alors y. le système a deux couples solutions (–1 ; 4) et (4 ; –1)

3) $\begin{cases} x+\sqrt{y}=0 \\ x+y=20 \end{cases}$ **n'est pas** un système linéaire.

y doit être positif et $\sqrt{y} = -x$ donc x doit être négatif pour que $(-x)$ soit positif.
En élevant au carré : $y = x^2$ et en remplaçant dans la deuxième équation : $x^2 + x - 20 = 0$
On trouve deux solutions pour x : 4 et –5, mais 4 est exclu.
Le couple (–5 ; 25) est solution du système.

4) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ xy=\frac{-1}{6} \end{cases}$ **n'est pas** un système linéaire.

La première équation donne $\frac{x+y}{xy}$ = 5. Comme $xy = -\frac{1}{6}$, on a donc : $x + y = -\frac{5}{6}$.

On obtient un système équivalent : $\begin{cases} x+y=-\frac{5}{6} \\ xy=\frac{-1}{6} \end{cases}$ qui se résout comme pour le 2).

On a successivement : $y = \frac{5}{6} - x$, $x\left(\frac{-5}{6}-x\right) = -\frac{1}{6}$, soit : $6x^2 + 5x - 1 = 0$ qui a pour solutions : $\frac{1}{6}$ et -1.

Le système a deux couples solutions $\left(\frac{1}{6};-1\right)$ et $\left(-1;\frac{1}{6}\right)$.

Autre méthode : (par changement de variables)
on pose : $s = \frac{1}{x}$ et $t = \frac{1}{y}$. On a donc : $\begin{cases} s+t=5 \\ st=-6 \end{cases}$
La méthode précédente donne : $s^2 - 5s - 6 = 0$ qui a pour solutions -1 et 6.
Comme x et y sont les inverses de s et t, on retrouve les deux couples solutions $\left(\frac{1}{6};-1\right)$ et $\left(-1;\frac{1}{6}\right)$.