

Exercice 1 : La tournée d'un voyageur de commerce

Le graphe schématise les routes que peut emprunter un voyageur de commerce pour visiter ses clients.

1) Ce graphe est-il connexe ? est-il complet ?

2) Déterminer le degré de chaque sommet.

Existe-t-il une chaîne eulérienne ? un cycle eulérien ?

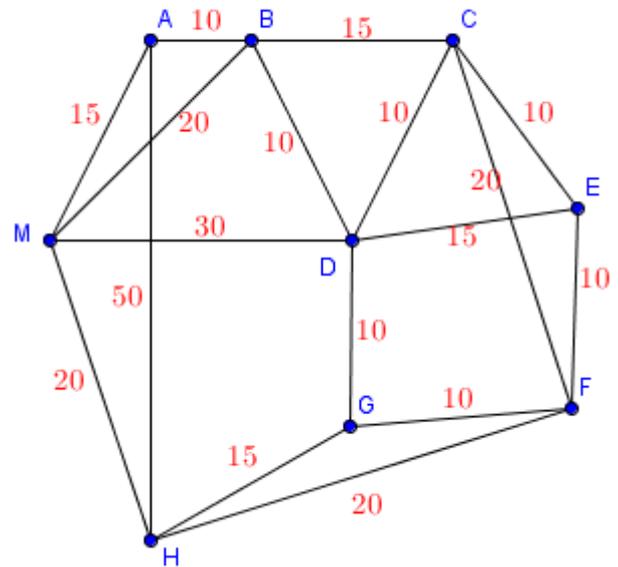
3) Le voyageur de commerce démarre de sa maison M, visite chaque client et désire rentrer chez lui en ne passant pas deux fois chez le même client (*On dit qu'un tel trajet est un trajet hamiltonien (Hors programme)*).

Proposer au moins trois tournées.

4) Sur le graphe sont indiquées les distances en km.

(On dit qu'un tel graphe est un graphe pondéré (au programme))

Déterminer le trajet le plus court.

**Exercice 2 : Graphe orienté**

Soit M la matrice d'un graphe orienté G dont les sommets A, B, C, D, E sont pris dans l'ordre alphabétique.

On donne :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Construire le graphe orienté G.

2) a) À l'aide de la calculatrice, calculer M^3 et donner le nombre de chemins de longueur 3 de B à D.

b) Écrire les 3 chemins.

3) **Sans calculer** M^6 , donner le nombre de chemins de longueur 6 de B à D.

Vérifier en calculant M^6

Correction exercice 1 :

1) Le graphe est connexe (tous les sommets sont reliés ... aucun sommet isolé)

le graphe n'est pas complet, certains sommets ne sont pas adjacents. (Il n'existe pas d'arête entre M et G par exemple).

(Remarque : un graphe complet d'ordre 9 (9 sommets) aurait 36 arêtes ($\frac{9 \times 8}{2}$))

2)

Sommet	M	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	4	3	4	4	5	3	4	3	4

La somme des degrés est 34.

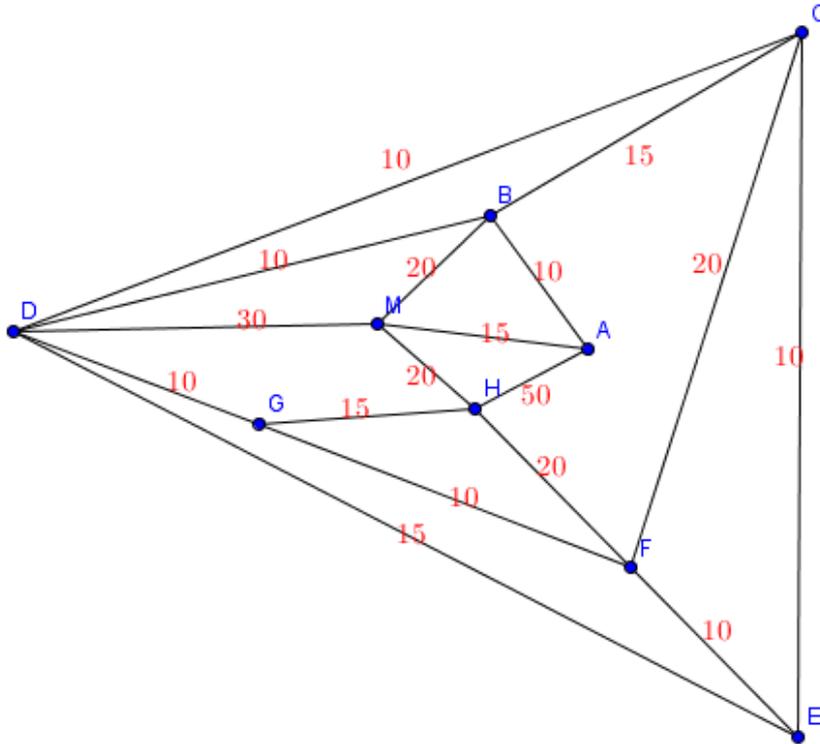
Le graphe n'étant pas orienté, le nombre d'arêtes est 17.

Puisque 4 sommets sont de degré impair, il n'existe pas de chaîne eulérienne (ni de cycle eulérien évidemment).

3)

M(0)	A(15)	B(25)	C(40)	D(50)	E(65)	F(75)	G(85)	H(100)	M(120)
							H	G	XXXX
								XXX	
						F	E	XXXX	
							H	XXXX	
					G		E	F	XXXX
						H	F	E	XXXX
							XXXX		
				E(50)	D(65)	G(75)	F(85)	H(105)	M(125)
							H	F	XXXXX
					F(60)		D	XXXX	
						G	H	XXXX	
						H(80)	G(95)	D(105)	M(135)
					E(70)	D(85)	G(95)	H(110)	M(130)
						G	E	XXXX	
						H	XXXX		
					F(60)		D	E	XXXX
						H	G		XXXX
							D	E	
					C(45)	E(55)	F(65)	G(75)	H(90)
								H	G
								G	H
								H	XXX
					E				M
						F	G	H	XXX
							H	G	XXX
								E	XXX
						F	C	E	XXXX
							E	C	XXXX
						H	F	C	XXX
								E	C
									XXXX
						B		E	XXXX
							D	G	XXXXX
									XXXX
							B	A	XXXX
						D		E	XXXX
								G	XXXXX
						E	D	B	XXXXX
								G	XXXX
								B	XXXX
						E	C	D	XXXX
								B	XXXX
								G	XXXXX

					G	XXXXX				
				E	D	G	XXXXX			
			E	C	B	A	XXXXX			
					D	D	G	XXXXX		
					D	B	A	XXXXXX		
					D	G	XXXXXX			
				D	C	B	A	XXXX		
				D	G	XXXXX				
		G	D	G	D	C	B	A	XXXXX	
					D	E	XXXXX			
				D	E	C	B	A	M	
				D	B	A	XXXXX			
						C	E	F	XXXXX	
					C	B	A	XXXXX		
						E	F	XXXXX		
						F	E	XXXXX		
						E	C	B	A	XXXXX
				F	F	XXXXXX				
				F	C	B	A	M		
				F	C	D	B	A	XXXX	
E	E	XXXXX								
E	C	E	D		B	A	M			
		C	B		A	XXXXX				
	D	D	B		A	M				
	D	B	A		XXXX					
D	C	XXXX								
C	B	A	M							



- M, H, G, F, E, D, C, B, A, M. = 120
- M, H, G, F, E, C, D, B, A, M. = 110
- M, H, G, F, C, E, D, B, A, M. = 125
- M, H, G, D, E, F, C, B, A, M. = 130
- M, H, F, G, D, E, C, B, A, M. = 125
- M, H, A, B, C, E, F, G, D, M. = 165
- M, D, G, H, F, E, C, B, A, M. = 135
- M, D, G, F, E, C, B, A, H, M. = 165
- M, D, E, C, F, G, H, A, B, M. = 180
- M, D, C, E, F, G, H, A, B, M. = 165
- M, D, B, C, E, F, G, H, A, M. = 165
- M, B, D, E, C, F, G, H, A, M. = 165
- M, B, D, C, E, F, G, H, A, M. = 150
- M, B, C, F, E, D, G, H, A, M. = 170
- M, B, C, D, E, F, G, H, A, M. = 160
- M, B, C, E, D, G, F, H, A, M. = 165
- M, B, A, H, G, F, E, C, D, M. = 165
- M, B, A, H, G, F, C, E, D, M. = 180
- M, A, B, D, E, C, F, G, H, M. = 125
- M, A, B, D, C, E, F, G, H, M. = 110
- M, A, B, C, F, E, D, G, H, M. = 130
- M, A, B, C, E, F, H, G, D, M. = 135
- M, A, B, C, E, D, G, F, H, M. = 125
- M, A, B, C, D, E, F, G, H, M. = 120
- M, A, H, F, G, D, E, C, B, M. = 165
- M, A, H, G, F, E, D, C, B, M. = 160
- M, A, H, G, F, E, C, D, B, M. = 150
- M, A, H, G, F, E, C, B, D, M. = 165
- M, A, H, G, F, C, E, D, B, M. = 165
- M, A, H, G, D, E, F, C, B, M. = 170

M, H, G, F, E, D, C, B, A, M. = 120

M, H, G, F, E, C, D, B, A, M. = 110

M, H, G, F, C, E, D, B, A, M. = 125

M, H, G, D, E, F, C, B, A, M. = 130

M, H, F, G, D, E, C, B, A, M. = 125

M, H, A, B, C, E, F, G, D, M. = 165

M, D, G, H, F, E, C, B, A, M. = 135

M, D, G, F, E, C, B, A, H, M. = 165

M, D, E, C, F, G, H, A, B, M. = 180

M, D, C, E, F, G, H, A, B, M. = 165

M, D, B, C, E, F, G, H, A, M. = 165

M, B, D, E, C, F, G, H, A, M. = 165

M, B, D, C, E, F, G, H, A, M. = 150

M, B, C, F, E, D, G, H, A, M. = 170

M, B, C, D, E, F, G, H, A, M. = 160

M, B, C, E, D, G, F, H, A, M. = 165

M, B, A, H, G, F, E, C, D, M. = 165

M, B, A, H, G, F, C, E, D, M. = 180

M, A, B, D, E, C, F, G, H, M. = 125

M, A, B, D, C, E, F, G, H, M. = 110

M, A, B, C, F, E, D, G, H, M. = 130

M, A, B, C, E, F, H, G, D, M. = 135

M, A, B, C, E, D, G, F, H, M. = 125

M, A, B, C, D, E, F, G, H, M. = 120

M, A, H, F, G, D, E, C, B, M. = 165

M, A, H, G, F, E, D, C, B, M. = 160

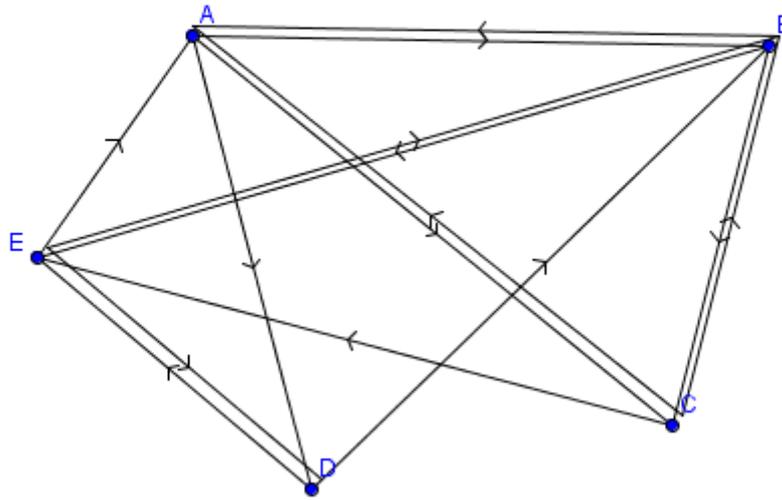
M, A, H, G, F, E, C, D, B, M. = 150

M, A, H, G, F, E, C, B, D, M. = 165

M, A, H, G, F, C, E, D, B, M. = 165

M, A, H, G, D, E, F, C, B, M. = 170

Correction exercice 2



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

```
[A]^3
[[[6 6 4 5 3]
[[5 6 5 3 6]
[[5 7 4 3 6]
[[3 5 3 3 3]
[[6 6 3 3 5]]]
```

De B à D, on dénombre 3 chemins de longueur 3 (2ième ligne, 4ième colonne).

- B-C-A-D
- B-C-E-D
- B-E-A-D

Pour obtenir un chemin de longueur 6 à partir de B et arrivant en D, on peut comptabiliser les chemins de longueur 3 partant de B vers un des points A, B, C, D, E et ceux de longueur 3 partant d'un de ces points et arrivant à D.

On multiplie les termes de la deuxième ligne par ceux correspondant de la quatrième colonne, et, on effectue la somme de ces produits :

$$(5 \ 6 \ 5 \ 3 \ 6) \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \times 5 + 6 \times 3 + 5 \times 3 + 3 \times 3 + 6 \times 3 = 85$$

$$A^6 = A^3 \times A^3$$

le nombre de chemins de longueur 6 de B à D

```
[[[119 143 94 84 108]
[[130 152 97 85 120]
[[130 151 98 85 120]
[[85 102 67 57 81]
[[120 138 90 81 106]]]
```