Analysez les calculs avant de vous lancer dans l'exécution de ce calcul:

Quand vous lisez une phrase en français, il ne suffit pas d'avoir les mots, il faut aussi comprendre la "syntaxe ".

Pour comprendre la phrase, il faut connaître les mots, les symboles et comprendre comment ils sont agencés pour lui donner du sens.

Deux phrases avec les mêmes mots peuvent avoir des sens différents :
Exemples: "Être beau de loin" et 'Loin de être beau".

" Le professeur dit: cet élève est bon " et " le professeur, dit cet élève, est bon "

Lorsque l'on donne une expression comme 2 + 3×4 à calculer, on doit nécessairement analyser syntaxiquement l'expression pour pouvoir faire le calcul. Si on le fait dans l'ordre 2+3 = 5 puis 5×4 = 20, ON SE TROMPE car la multiplication est "prioritaire".

Il faut analyser l'expression, 2 + 3×4 est la somme de 2 et de 3×4.

3×4 est le produit de 3 par 4.

Finalement, on fait: 2 + 3×4 = 2 + 12 = 14, car, on a reconnu " l'agencement " de la phrase mathématique et on a su lui donner tout son sens.

Les mêmes symboles agencés autrement donneront un autre sens.

Les parenthèses sont des symboles nécessaires pour exprimer cet agencement des calculs.

Pour écrire le produit de la somme de x et 3 par la somme de x et 5, on écrit: $(x + 3)\times(x + 5)$.

La phrase mathématique $x + 3\times(x + 5)$ a un autre sens: elle est l'écriture de la somme de x et du produit de 3 par la somme de x et 5.

Remarque: Tout résultat qui peut être lu sur la calculatrice de façon évidente (variation, position relative de courbes, limites, ...) et qui n'est pas justifié par un calcul ou un raisonnement n'est pas "acceptable"
Dans tous les cas, soutenez votre réflexion en faisant des schémas.

I- On pose $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ f est définie pour l'ensemble des réels qui n'annulent pas le dénominateur.

1) a) Racines et signe du polynôme $x^2 + x + 1$ ***Deux méthodes usuelles***:

Une méthode: forme canonique $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

Une autre méthode: calcul du discriminant $\Delta = ... = -3$ donc, $x^2+x+1>0$

Conclusion: $D_f = \mathbb{R}$.

b) Pour tout x réel, $ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+x+1}=\dfrac{(ax+b)(x^2+x+1)+cx+d}{x^2+x+1}=...=\dfrac{ax^3+(a+b)x^2+(a+b+c)x+b+d}{x^2+x+1}$

Par ***identification des coefficients***: $\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ a+b+c=0 \\ b+d=0 \end{cases}$, ce qui donne: $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$.

On peut donc écrire: $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x^2+x+1}$

2) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+x+1} = 0$, la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à C_f en $+\infty$.
De même en $-\infty$.
Comme $\dfrac{1}{x^2+x+1} > 0$, la courbe C_f est toujours située au-dessus de Δ.

Commentaires sur le I- Les limites et les variations sont des études indépendantes. Mais lorsque vous résumez ces études dans un tableau ou sur un graphique, veillez à la cohérence... S'il y a incohérence, ne bricolez pas les résultats (Si vous ne trouvez pas votre erreur, écrivez que vous avez vu l'incohérence)
1) Il s'agit de démontrer une égalité. Ne pas commencer par la conclusion...
2) Le signe de $x^2 + x + 1$ n'est pas évident lorsque $x < 0$

Exemples: Signe de $100x^2 + 199x + 100$, signe de $100x^2 + 201x + 100$.
Pensez à une parabole et la position de son sommet.

II- $f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+1}$

1) x, étant un réel, a une image par f si et seulement si $x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$ ***Deux méthodes usuelles***:

Une méthode

$$x^2-3x+1=(x-\frac{3}{2})^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}=\left[(x-\frac{3}{2})+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[(x-\frac{3}{2})-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$$

Une autre méthode: calcul du discriminant: $\Delta = ... = 5$

Comme $\Delta > 0$, $x^2 - 3x + 1$ possède deux racines et est positif lorsque $x \leq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x \geq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

L'ensemble de définition de f est une ***réunion*** d'intervalles: $D_f = \left]-\infty ; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$

et, pour tout x de cet ensemble D_f: $f(x)=\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}$

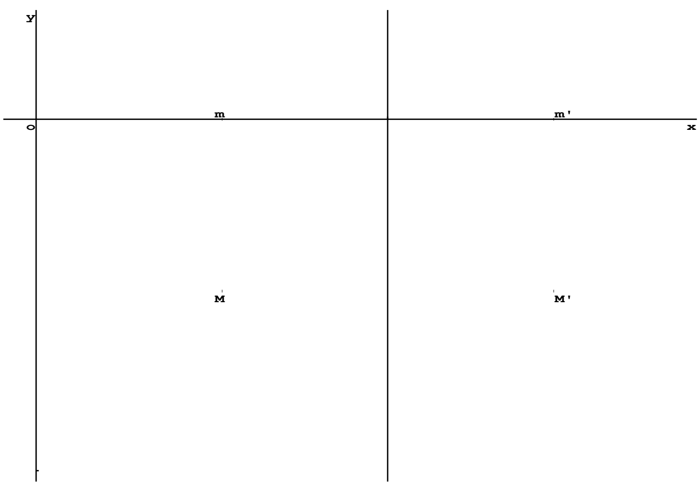
Axe de symétrie: Dans un repère orthogonal, la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de C_f si et seulement si, f vérifie la propriété suivante:

$x \in D_f$ implique $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$ *(i)*

ou encore

$a - h \in D_f$ implique $a + h \in D_f$ et $f(a-h) = f(a+h)$ *(ii)*

Illustration:



x est l'abscisse de m. Le milieu de $[mm']$ a pour abscisse a si et seulement si $\dfrac{x+x'}{2}=a$, *soit*: $x'=2a-x$

Les ordonnées de M et M' sont égales et valent: $f(x)$ et $f(2a-x)$

Application: Montrons que la droite d'équation $x=\dfrac{3}{2}$ est un axe de symétrie de C_f

Vérifions (*i*): Soit $x \in D_f$, alors, $x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

On a donc: $3-x \geq 3-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $3-x \leq 3-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

On obtient: $3-x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $3-x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, ce qui prouve $3-x \in D_f$

et, $f(3-x)=\sqrt{(3-x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}=\sqrt{(\frac{3}{2}-x)^2-\frac{5}{4}}=f(x)$

(On peut aussi vérifier (ii) au lieu de vérifier (i): Soit h tel que $\frac{3}{2}-h \in D_f$

On a alors $h \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$ *ou* $h \leq \frac{-\sqrt{5}}{2}$*, et, par conséquent* $\frac{3}{2}+h \in D_f$

D'autre part: $f(\frac{3}{2}-h)=\sqrt{(-h)^2-\frac{5}{4}}$ *et* $f(\frac{3}{2}+h)=\sqrt{h^2-\frac{5}{4}}$*, ce qui prouve l'égalité)*

2) **Étudions** la limite de $f(x)-(x-\frac{3}{2})$ en $+\infty$

$$\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}-(x-\frac{3}{2})=\frac{(\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}-(x-\frac{3}{2}))(\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}+(x-\frac{3}{2}))}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}+(x-\frac{3}{2})}=\frac{\frac{-5}{4}}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}+(x-\frac{3}{2})}$$

En $+\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, d'où, $\lim_{x \to +\infty} f(x)-\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$

Ce qui prouve que la droite D_1 d'équation $y=x-\frac{3}{2}$ est asymptote à C_f et comme la différence $f(x)-(x-\frac{3}{2})$ est strictement négative d'après le calcul précédent, C_f est strictement en-dessous de cette asymptote.

3) Au 1), on a prouvé que C_f était symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\frac{3}{2}$.

Par symétrie, il existe une droite D_2 symétrique de D_1 asymptote à C_f en $-\infty$.
(*Faire un schéma pour soutenir le raisonnement)*

Recherche d'une équation de D_2 ***:***

Soit *M* d'abscisse *x* sur D_1. Ce point *M* a pour coordonnées $(x\,;\,x-\frac{3}{2})$

Le point *M'* symétrique de *M* par rapport à la droite d'équation $x=\frac{3}{2}$ a pour coordonnées $x'=3-x$ et $y'=x-\frac{3}{2}$.

Il reste à "éliminer" *x* pour trouver une relation entre les coordonnées *x'* et *y'* de *M'*, ce qui fournira une équation de D_2

De $x'=3-x$, on tire $x=3-x'$ et en substituant dans l'égalité $y'=x-\frac{3}{2}=3-x'-\frac{3}{2}=-x'+\frac{3}{2}$.

Une équation de D_2 est: $y=-x+\frac{3}{2}$

Commentaires sur II-. $\sqrt{X}$ est défini si et seulement si $X \geq 0$
On étudie donc le signe de X
Le signe de $\sqrt{X}$ n'est pas à étudier. (On le connaît dès que l'expression est définie)
Exemple: étudier $\sqrt{x-2-x^2}$

Quand a-t-on l'égalité: $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{A+B}$?

$$\boxed{\sqrt{expression\ aussi\ longue\ que\ vous\ voulez}-(autre\ expression)=\frac{(expression\ aussi\ longue\ que\ vous\ voulez)-(autre\ expression)^2}{\sqrt{expression\ aussi\ longue\ que\ vous\ voulez}+(autre\ expression)}}$$

Équation d'une courbe représentative d'une fonction f
$M(abscisse\ de\ M\ ;\ ordonnée\ de\ M) \in C_f$ équivaut à $ordonnée\ de\ M = image\ de\ (abscisse\ de\ M)\ par\ f$

c'est-à-dire: $M(x; y) \in C_f$ équivaut à $y = f(x)$

ce qui entraîne aussi: Soit $N(x_N ; y_N)$. Si $y_N \neq f(x_N)$ alors $N \notin C_f$
Si $N \notin C_f$ alors $y_N \neq f(x_N)$

En général, trouver une équation de courbe, c'est déterminer une relation entre les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe.
Exemple: Le cercle C de centre $\Omega(\alpha ; \beta)$ et de rayon r $(r \geq 0)$
$M(x; y) \in C$ équivaut à $\Omega M = r$ équivaut à $\Omega M^2 = r^2$ (car, distance) équivaut à $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$
Cette relation est une équation du cercle (mais le cercle n'est pas représentatif d'une fonction)

III) $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{-2 ; 0\}$ et $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}$ et $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$
1) Il y a ***six bornes*** à D_f: $-\infty$, -2 à droite, -2 à gauche, 0 à droite, 0 à gauche, $+\infty$

Limites en $+\infty$ ***et en*** $-\infty$
De façon évidente: (*Ne pas modifier les écritures de f(x) et g(x) pour cette question).* Comme $\lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (x+2) = \pm\infty$ alors $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$
La droite d'équation $y=0$ (axe des abscisses) est asymptote à C_f et à C_g

Limites en -2 *la limite de* $\frac{1}{x}$ *est* $\frac{-1}{2}$ *et comme celle de* $\frac{1}{x+2}$ *est infinie, il est suffisant de*

à gauche: si $x<-2$, alors, $x+2<0$ et $\lim_{x \to -2} x+2=0$. On a: $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} g(x) = +\infty$

à droite: si $x>-2$ alors, $x+2>0$ et $\lim_{x \to -2} x+2=0$. On a: $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} g(x) = -\infty$
La droite d'équation $x=2$ est asymptote à C_f et à C_g

Limites en 0 *Même remarque que précédemment*
à droite: si $x<0$. On a: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = -\infty$

à gauche: si $x>0$. On a: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=+\infty$

La droite d'équation $x=0$ (axe des ordonnées) est asymptote à C_f et à C_g

2) $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ *Ne pas modifier l'écriture. L'information désirée (signe de f'(x)) est évidente.* Par conséquent, $f'(x)<0$ pour tout x de D_f.

f est strictement décroissante sur $]-\infty;-2[$, sur $]-2;0[$, sur $]0;+\infty[$.

$$g'(x)=\frac{-1}{x^2}-\left(\frac{-1}{(x+2)^2}\right)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{-4\text{x}-4}{x^2(x+2)^2}$$

La somme de deux nombres de signes contraires: il est nécessaire de trouver une autre écriture permettant de déterminer le signe de g'(x), d'où, la mise au même dénominateur ....

Par conséquent, pour x de D_g , $g'(x)<0$ lorsque $x>-1$ et $g'(x)>0$ lorsque $x<-1$

On en déduit: g est strictement croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;-1]$

g est strictement décroissante sur $[-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

g atteint un maximum en -1 sur $]-2;0[$ qui vaut $g(-1)=-2$

3) Une équation de la tangente T_{-1} à C_f au point $\Omega(-1;0)$ est donnée par: $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$

On obtient: $y=-2\text{x}-2$

Remarque: Ω *est nécessairement un point commun à* C_f *et* T_{-1}

La position de C_f ***par rapport à*** T_{-1} est donnée par le signe de $f(x)-(-2\text{x}-2)$

$$f(x)-(-2x-2)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}+2(x+1)=\frac{x+2+x+2(x+1)x(x+2)}{x(x+2)}=$$

$$\frac{2(x+1)+2(x+1)x(x+2)}{x(x+2)}=\frac{2(x+1)(1+x^2+2\text{x})}{x(x+2)}=\frac{2(x+1)(x+1)^2}{x(x+2)}$$

Pour déterminer un signe, factoriser!!!

Il suffit d'étudier le signe de $\dfrac{x+1}{x(x+2)}$

Tableau de signes:

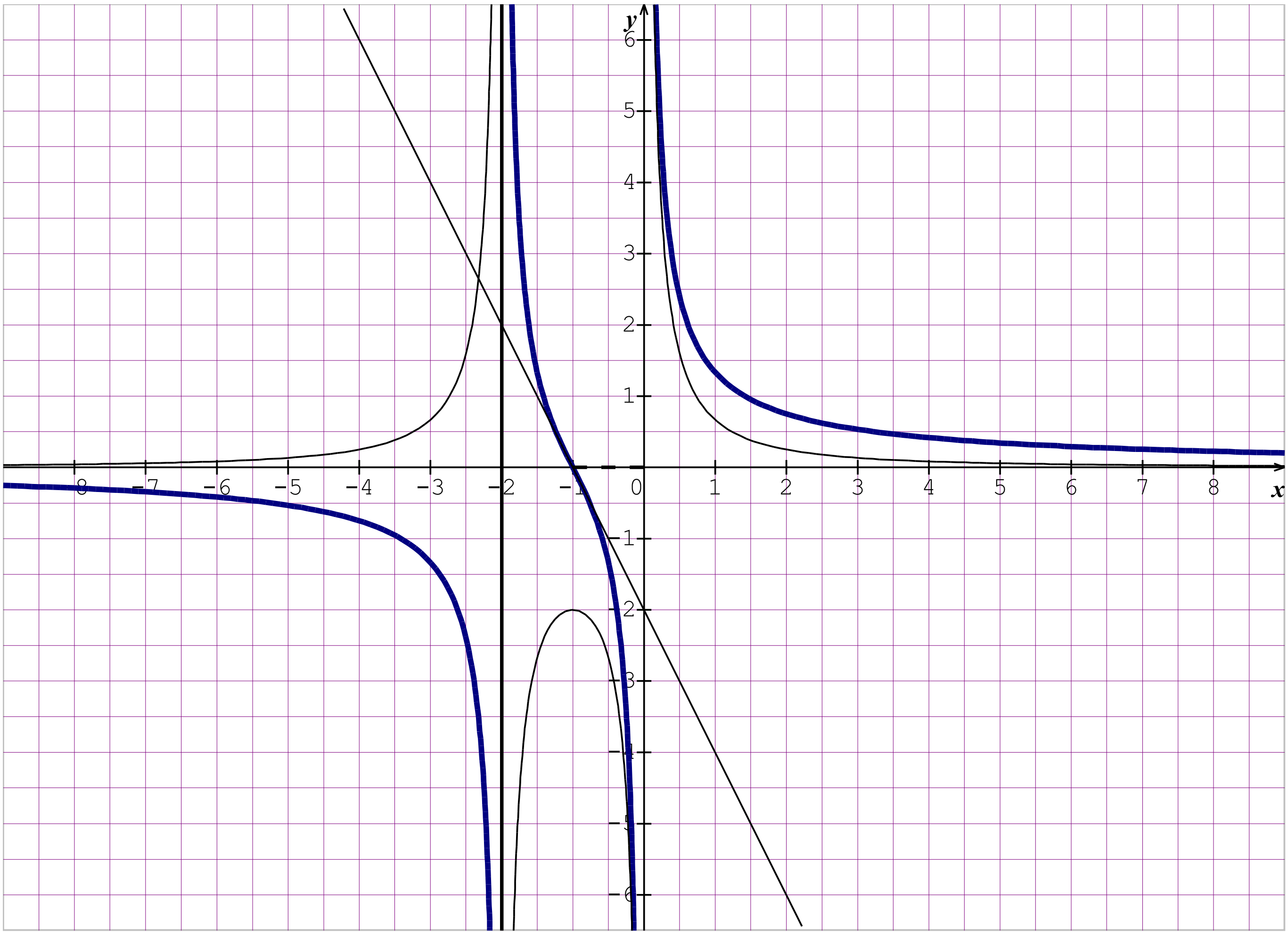
x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
signe de (x+1)		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de (x)		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de (x+2)		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{x+1}{x(x+2)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
Position de C_f par rapport à T_{-1}		au-dessous	$\Vert$	au-dessus		au-dessous	$\Vert$	au-dessus	

Position relative de C_f ***et*** C_g

Il suffit d'étudier le signe de $f(x)-g(x)=...=\dfrac{2}{x+2}$

C_f est au-dessus de C_g sur $]-2;0[\cup]0;+\infty[$ et C_f est au-dessous de C_g sur $]-\infty;-2[$

4) Commencer par construire les asymptotes, les tangentes connues.....
Respecter les variations ...



Respecter les positions relatives des courbes ....

5) ***Centre de symétrie***

Dans un repère, le point $\Omega(a\,;b)$ est un centre de symétrie de C_f si et seulement si, *f* vérifie la propriété suivante:

$$x \in D_f \text{ implique } 2\text{a}-x \in D_f \text{ et } f(2\text{a}-x)+f(x)=2\text{b} \quad \textit{(i)}$$

ou encore

$$a-h \in D_f \text{ implique } a+h \in D_f \text{ et } f(a-h)+f(a+h)=2\text{b} \quad \textit{(ii)}$$

Soit *h* tel que $-1-h$ appartient à D_f. On a alors: $h \neq -1$ et $h \neq 1$.
Par conséquent, $-1+h \neq -2$ et $-1+h \neq 0$, ce qui prouve que $-1+h$ est un élément de D_f.

$f(-1-h)+f(-1+h)=\frac{1}{-1-h}+\frac{1}{-1-h+2}+\frac{1}{-1+h}+\frac{1}{-1+h+2}=...=0$. Ce qui prouve que $\Omega(-1\,;0)$ est centre de symétrie de C_f

L'axe $(\Omega\,;\vec{j})$ a pour équation $x=-1$

$g(-1-h)=\frac{1}{-1-h}-\frac{1}{-1-h+2}=-\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1-h}$ et $g(-1+h)=\frac{1}{-1+h}-\frac{1}{-1+h+2}=-\frac{1}{1-h}-\frac{1}{1+h}$

L'égalité $g(-1-h)=g(-1+h)$ prouve que la droite d'équation $x=-1$ est un axe de symétrie de C_g

Commentaires sur III-. Prendre le temps d'analyser les opérations: SOMME (différence) de ... d'où propriété des sommes (et non des produits)....

PRODUIT (quotient) de ....d'où propriété des produits (et non des sommes)....

Détailler dès que ce n'est pas évident:

Signe de $\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}$ évident.

Signe de $\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1}$ Ce n'est pas évident, d'où, une recherche ....

Position de C_f et d'une tangente :
heureusement que le point de contact est commun aux deux... Ce n'est pas l'objet de l'étude. Ce qu'il faut étudier, c'est le signe de la différence de ...

IV- 1) a) Dans le triangle *OHC* rectangle en *H*, on sait: $HC=OC\times\sin\alpha$ et $OH=OC\times\cos\alpha$.
Comme $OC=1$ (rayon du cercle), obtient: $BC=2\text{HC}=2\sin\alpha$ et $AH=AO+OH=1+\cos\alpha$

b) L'aire de *ABC* vaut: $\frac{BC\times AH}{2}=\sin\alpha(1+\cos\alpha)=f(\alpha)$

2) $f'(\alpha)=\cos\alpha(1+\cos\alpha)+\sin\alpha\times(-\sin\alpha)=\cos^2\alpha+\cos\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1$

3) a) Factorisation de 2X^2+X-1

Le discriminant $\Delta=...=9=3^2$, d'où, le trinôme 2X^2+X-1 possède deux racines $X_1=...=-1$ et $X_2=...=\frac{1}{2}$

On obtient: $2\text{X}^2+X-1=2(X+1)(X-\frac{1}{2})$

En posant $\cos\alpha=X$, on en déduit: $f'(\alpha)=2(\cos\alpha+1)(\cos\alpha-\frac{1}{2})$

b) Comme sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ la fonction cosinus est positive, le signe de $f'(\alpha)$ est celui de $\cos\alpha-\frac{1}{2}$

Comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et que $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, on a: $\cos\alpha-\frac{1}{2}>0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right[$ et $\cos\alpha-\frac{1}{2}<0$ sur $\left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos\alpha-\frac{1}{2}=0$ en $\frac{\pi}{3}$

Conclusion: *f* est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$

$f(0)=0$ (Les points *B* et *C* sont confondus). $f(\frac{\pi}{2})=1$ (*ABC* est un triangle rectangle isocèle en *A* de base $BC=2$ et de hauteur $AO=1$)

a) *f* croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ implique si $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{3}$ alors $f(\alpha)\leq f(\frac{\pi}{3})$

f décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ implique si $\frac{\pi}{3}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ alors $f(\alpha)\leq f(\frac{\pi}{3})$

f atteint son maximum en $\frac{\pi}{3}$ et ce maximum vaut $f(\frac{\pi}{3})=...=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

En ce cas, le triangle *ABC* est équilatéral. L'angle $\widehat{BAC}$ = $2\times\widehat{HAC}$ = 2($\frac{1}{2}$ $\widehat{HOC}$) = $\widehat{HOC}$ = $\frac{\pi}{3}$

Commentaires sur IV.

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
$\cos\alpha = X$	1	$\frac{1}{2}$	0	Nombre positif
$\cos\alpha + 1 = X + 1$	2		1	Nombre positif
$\cos\alpha - \frac{1}{2} = X - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	Nombre qui change de signe

Lorsque α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha$ décroît de 1 à 0 en "passant" donc par $\frac{1}{2}$, d'où, l'étude du signe de $\cos\alpha - \frac{1}{2}$ ...