Index

DM2 à rendre le vendredi 8 octobre 2010:
Pour réactiver la notion de limites: 1 et 2 page 27.
Pour réactiver les formules de dérivation: 1- 2- 14 page 57
Pour s'entraîner dans les calculs sur $\mathbb{C}$: 26 page 279; 32 page 279
Pour approfondir (le mois de juin n'est pas loin): Exercice B page 288, exercice C page 288

1 page 27

Dans cet exercice $x > 0$ (Ce qui signifie que l'utilisation des variations de fonctions est faite **sur** $]0; +\infty[$

Les variations utiles:

(1) La fonction carrée est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

(2) La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

a) $x^2 > 10\,000$ si $x > 100$ d'après (1)

b) $x^2 < 0{,}000\,1$ si $0 < x < 0{,}01$ d'après (1)

c) $\frac{1}{x} > 10\,000$ si $0 < x < \frac{1}{10000}$ d'après (2)

d) $\frac{1}{x} > 0{,}001$ si $0 < x < 1000$ d'après (2)

e) $\frac{1}{x} < 10^6$ si $x > 10^{-6}$ d'après (2)

Complément: (lien avec les définitions des limites en ...)

Ces résultats sont valables en remplaçant par 10^n ou 10^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ selon les cas

On a donc: Soit le réel 10^{2n}.

Il existe un réel $x_0 = 10^n$ tel que $x > x_0$ implique $x^2 > 10^{2n}$

Ce qui correspond à la définition de: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

De même pour les autres définitions des limites:

Par exemple: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ est justifié par:

Soit le réel 10^n

il existe un réel $\epsilon = 10^{-n}$, tel que $0 < x < \epsilon$ implique $\frac{1}{x} > 10^{n}$

---

2 page 27

Dans cet exercice $x < 0$ (Ce qui signifie que l'utilisation des variations de fonctions est faite **sur** $]-\infty; 0[$

Les variations utiles:

(1) La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

(2) La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

a) $x^2 > 10\,000$ si $x < -100$ d'après (1)

b) $x^2 < 0{,}000\,1$ si $-0{,}01 < x < 0$ d'après (1)

c) $\frac{1}{x} < -10\,000$ si $-\frac{1}{10000} < x < 0$d'après (2)

d) $\frac{1}{x} > -0{,}001$ si $x < -1000$ d'après (2)

e) $\frac{1}{x} > -10^{-4}$ si $x < -10^{4}$ d'après (2)

Synthèses de 1/ et 2/

1)Les données: $x > 0$ et l'ordre des images

x	0	x est inférieur à 0,01	100	x est supérieur à 100	$+\infty$
x^2	0	x^2 est inférieur à 0,0001	10 000	x^2 est supérieur à 10 000	$+\infty$

x	0	**x est inférieur à 0,000 1**	$+\infty$
$1/x$	$+\infty$	$1/x$ est supérieur à 10 000	0

2)Les données: $x < 0$ et l'ordre des images

x	$-\infty$	x est inférieur à – 100	–0,01	**x est supérieur à –0,01**	0
x^2	$+\infty$	x^2 est supérieur à 10 000	0,0001	x^2 est inférieur à 0,0001	0

x	$-\infty$ x est inférieur à –1000	–0,000 1 x supérieur à –0,0001	0
1/x	0 1/x est supérieur à -0,001	–10 000 1/x est inférieur à –10000	$-\infty$

---

1 page 56

Propriété à connaître:
f étant dérivable en *a*, le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse *a* est le nombre dérivé de *f* en *a*.

fonction	dérivée	coefficient directeur de la tangente nombre dérivé en *a*
$f: x \mapsto x^2$	$f': x \mapsto 2x$	$a = -1 \quad f'(-1) = -2$
$g: x \mapsto x^3$	$g': x \mapsto 3x^2$	$a = -2 \quad g'(-2) = 12$
$h: x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$h': x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$a = 1 \quad h'(1) = -1$
$k: x \mapsto \sqrt{x}$	$h': x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$a = 4 \quad k'(4) = \dfrac{1}{4}$

---

2 page 56

Propriété à connaître:
f étant dérivable en *a*, le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse *a* est le nombre dérivé de *f* en *a*.

fonction	dérivée	coefficient directeur de la tangente nombre dérivé en *a*
$f: x \mapsto x^2$	$f': x \mapsto 2x$	$a = 3 \quad f'(3) = 6$
$g: x \mapsto \sin x$	$g': x \mapsto \cos x$	$a = 0 \quad g'(0) = 1$
$h: x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$h': x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$a = -1 \quad h'(-1) = -1$
$k: x \mapsto \cos x$	$h': x \mapsto -\sin x$	$a = \dfrac{\pi}{2} \quad k'(\dfrac{\pi}{2}) = -1$

Compléments :
Les équations de tangentes ne sont pas demandées dans cet exercice.
Connaissant un point de la droite tangente $A(a; f(a))$ et le coefficient directeur de cette droite, on sait:
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$ avec $\Delta y = y - f(a)$ et $\Delta x = x - a$ avec $M(x; y)$ un point courant de la tangente.
Ce qui donne $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ est une équation de la tangente en A.

fonction	dérivée	coefficient directeur de la tangente nombre dérivé en a	$f(a)$	Équation de la tangente
$f: x \mapsto x^2$	$f': x \mapsto 2x$	$a = -1 \quad f'(-1) = -2$	$f(-1) = 1$	$y = -2(x+1)+1$ $y = -2x - 1$
$g: x \mapsto x^3$	$g': x \mapsto 3x^2$	$a = -2 \quad g'(-2) = 12$	$g(-2) = -8$	$y = 12(x+2) - 8$ $y = 12x + 16$
$h: x \mapsto \frac{1}{x}$	$h': x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$a = 1 \quad h'(1) = -1$	$h(1) = 1$	$y = -(x-1)+1$ $y = -x + 2$
$k: x \mapsto \sqrt{x}$	$h': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$a = 4 \quad k'(4) = \frac{1}{4}$	$k(4) = 2$	$y = \frac{1}{4}(x-4)+2$ $y = \frac{1}{4}x + 1$
$f: x \mapsto x^2$	$f': x \mapsto 2x$	$a = 3 \quad f'(3) = 6$	$f(3) = 9$	$y = 6(x-3)+9$ $y = 6x - 9$
$g: x \mapsto \sin x$	$g': x \mapsto \cos x$	$a = 0 \quad g'(0) = 1$	$g(0) = 0$	$y = x$
$h: x \mapsto \frac{1}{x}$	$h': x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$a = -1 \quad h'(-1) = -1$	$h(-1) = -1$	$y = -(x+1) - 1$ $y = -x - 2$
$k: x \mapsto \cos x$	$h': x \mapsto -\sin x$	$a = \frac{\pi}{2} \quad k'(\frac{\pi}{2}) = -1$	$k(\frac{\pi}{2}) = 0$	$y = -(x - \frac{\pi}{2})$ $y = -x + \frac{\pi}{2}$

14 page 57

$f(x) = -3x^4 + 2x^2 + 1$ $\qquad f'(x) = -12x + 4x$

Remarque: *f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)*

$g(x) = -x + \sqrt{x}$ $\qquad g'(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque: *g est définie sur [0; +∞[et dérivable sur]0; +∞[(fonction racine carrée)*

$h(x) = \frac{x^2+1}{x}$ $\qquad h'(x) = \frac{2x \times x - 1 \times (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

Remarque: *h est définie sur]−∞; 0[∪]0; +∞[et*
dérivable sur chacun des intervalles: sur]−∞; 0[et sur]0; +∞[(fonction rationnelle)

ou $h(x) = x + \frac{1}{x}$ $\qquad h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

$k(x) = (3x-1)^2$ $\qquad k'(x) = 2 \times 3 \times (3x-1) = 18x - 6$

Remarque: *k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)*

Pour la fonction k, il est important de reconnaître une fonction composée de … suivie de …

$x \mapsto 3x - 1 \mapsto (3x-1)^2$

26 page 279

$z + 3\bar{z} = (1 + i)^2$
On pose $z = a + ib$ où a et b sont des réels.
$z + 3\bar{z} = (1 + i)^2 \quad \Leftrightarrow \quad a + ib + 3(a - ib) = 2i \quad \Leftrightarrow \quad 4a - 2ib = 2i$
On en déduit: $a = 0$ et $b = -1$ par identification des parties réelles et des parties imaginaires.
conclusion: $z = -i$
Vérification: $-i + 3\times i = 2i$ et $(1 + i)^2 = 2i$

---

32 page 279

Pour tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = z^2$.

a) On pose $z = x + iy$ (x et y réels).

Remarque: dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, (x, y) sont les coordonnées cartésiennes du point M.

$z' = x' + iy' = (x + iy)^2 = ... = x^2 - y^2 + i(2xy)$

On a donc: $x' = x^2 - y^2$ et $y' = 2xy$

Remarque: dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, (x', y') sont les coordonnées cartésiennes du point M'.

b) ***Avec la forme algébrique***

***z'* est un réel** si et seulement si $y' = 0$

z' est un réel si et seulement si $2xy = 0$

z' est un réel si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$

L'ensemble des points M tels que z' est un réel est **la réunion des deux droites** d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$ (axes de coordonnées)

***z'* est un imaginaire pur** si et seulement si $x' = 0$
z' est un imaginaire pur si et seulement si $x^2 - y^2 = 0$

z' est un imaginaire pur si et seulement si $(x - y)(x + y) = 0$

z' est un imaginaire pur si et seulement si $y = x$ ou $y = -x$

L'ensemble des points M tels que z' est un imaginaire pur est **la réunion des deux droites** d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$ (bissectrices du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$)

c) ***Avec les conjugués:***

***z'* est un réel** si et seulement si $z' = \overline{z'}$

z' est un réel si et seulement si $z^2 = \overline{z^2}$, or $\overline{z^2} = \bar{z}^2$

z' est un réel si et seulement si $z^2 - \bar{z}^2 = 0$

z' est un réel si et seulement si $(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 0$

z' est un réel si et seulement si $z = \bar{z}$ ou $z = -\bar{z}$

z' est un réel si et seulement si z est un réel ou z est un imaginaire pur

L'ensemble des points M tels que z' est un réel est **la réunion des deux droites** d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$ (axes de coordonnées)

z' est un imaginaire pur si et seulement si $z' + \overline{z'} = 0$

z' est un imaginaire pur si et seulement si $z^2 + \overline{z^2} = 0$, or $\overline{z^2} = \overline{z}^2$

z' est un imaginaire pur si et seulement si $z^2 + \overline{z}^2 = 0$, or, $z^2 + \overline{z}^2 = z^2 - i^2.\overline{z}^2$)

z' est un imaginaire pur si et seulement si $(z - i\overline{z})(z + i\overline{z}) = 0$

z' est un imaginaire pur si et seulement si $z = i\overline{z}$ ou $z = - i\overline{z}$

En posant $z = x + iy$, on retrouve $y = x$ ou $y = -x$

L'ensemble des points M tels que z' est un imaginaire pur est **la réunion des deux droites** d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$ (bissectrices du repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$)

et pourquoi pas une troisième méthode:

z' est un réel si et seulement si $\arg(z') = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z' = 0$

si et seulement si $\arg(z^2) = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z^2 = 0$

si et seulement si $2\times\arg(z) = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$

si et seulement si $\arg(z) = 0 + k\dfrac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$

si et seulement si $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = 0 + k\dfrac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $M = O$.

On a donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ colinéaires, ou ,$\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ orthogonaux ….

z' est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z') = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z' = 0$

si et seulement si $\arg(z^2) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z^2 = 0$

si et seulement si $2\times\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$

si et seulement si $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$

si et seulement si $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $M = O$.

On a donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ forment un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{3\pi}{4}$ ou $\dfrac{5\pi}{4}$ ou $\dfrac{7\pi}{4}$ ...

Exercice B page 288

Soit f la fonction qui, à tout complexe z différent de $-2i$ associe: $Z = f(z) = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$

A et B sont les points d'affixes $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$

On a alors: $Z = \dfrac{z-z_A}{z-z_B}$

a) L'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit réel

" Z réel " équivaut à " $\{z \neq z_B$ et $(Z = 0$ ou $\arg(Z) = 0+ k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z})\}$ "

Or, $\arg(Z) = \arg\dfrac{z-z_A}{z-z_B} = \arg(z-z_A)-\arg(z-z_B) = \widehat{(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM})} - \widehat{(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM})} = \widehat{(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM})}$ $[2\pi]$

Par conséquent: " Z réel " équivaut à " $\{M \neq B$ et $(M = A$ ou $\widehat{(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM})} = 0+ k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z})\}$ "

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont donc colinéaires.

L'ensemble E est la droite (AB) privée de B.

b) L'ensemble F des points M d'affixe z, tels que Z soit imaginaire pur

" Z imaginaire pur " équivaut à " $\{z \neq z_B$ et $(Z = 0$ ou $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z})\}$ "

Par conséquent: " Z imaginaire pur " équivaut à " $\{M \neq B$ et $(M = A$ ou $\widehat{(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM})} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z})\}$ "

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont donc orthogonaux

L'ensemble F est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B.

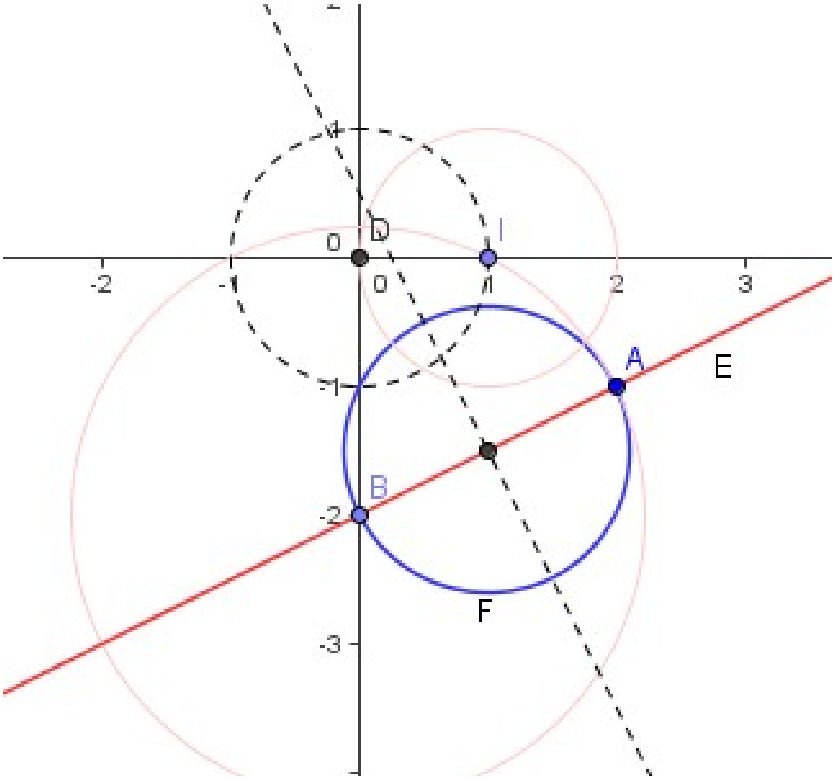
c) $$\begin{aligned}|f(z)-1|\times|z+2\,\mathrm{i}| &= \left|\left(\frac{z-2+\mathrm{i}}{z+2\,\mathrm{i}}-1\right)\right|\times|z+2\,i| \quad \text{avec } z \neq -2\mathrm{i}\\ &= \left|\frac{-2-\mathrm{i}}{z+2\,\mathrm{i}}\right|\times|z+2\,i|\\ &= \frac{|-2-\mathrm{i}|}{|z+2\,\mathrm{i}|}\times|z+2\,i|\\ &= |-2-\mathrm{i}|\\ &= \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

Or, $|f(z)-1| = IM'$ où I est le point d'affixe 1 et $|z+2\,\mathrm{i}| = BM$

On a donc: $IM' \times BM = \sqrt{5}$

Si M parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, on a: $BM = \sqrt{5}$ et par conséquent, $IM' = 1$

Les points M' sont sur le cercle de centre I (d'affixe 1) et de rayon 1.



Si un point $M(z)$ décrit la droite (AB) privée de B (ensemble E) son image par la transformation T est un point de l'axe des réels.

Si un point $M(z)$ décrit le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B (ensemble F) son image par la transformation T est un point de l'axe des imaginaires purs.

le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ a pour image par T le cercle de centre I et de rayon 1
la médiatrice de $[AB]$ a pour image par T le cercle de centre O et de rayon 1

COMPLÉMENTS
Pour l'entraînement aux calculs, mais, méthode extrêmement maladroite dans le contexte de l'exercice:
On pose $z = x + \mathrm{i}\, y$ avec x et y réels.
On a donc: $Z = \dfrac{x+\mathrm{i}\,y-2+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}\,y+2\mathrm{i}} = \dfrac{(x-2+\mathrm{i}(y+1))(x-\mathrm{i}(y+2))}{x^2+(y+2)^2} = X+\mathrm{i}\,Y$

avec $Re(Z)=X= \dfrac{x^2-2x+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$ et $Im(Z)= Y = \dfrac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$

Z est un réel si et seulement si $z \neq z_B$ et $-x+2y+4=0$
On retrouve l'équation de la droite (AB) avec B exclu

Z est un imaginaire pur si et seulement si $z \neq z_B$ et $x^2-2x+y^2+3y+2 = 0$
On retrouve l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec B exclu

Pour la dernière question, l'interprétation géométrique est:

Si M décrit un cercle de centre B et de rayon R alors M' décrit un cercle de centre I et de rayon $R' = \dfrac{\sqrt{5}}{R}$

On peut aussi interpréter $|Z|$ avec $|Z|=\dfrac{AM}{BM}$ et donc, par exemple, l'ensemble des points M du plan d'affixes z tels que $|Z|=1$ (C'est-à-dire les points M' sont sur le cercle de centre O et de rayon 1) est la médiatrice de $[AB]$. Les points images M' des points de la médiatrice de $[AB]$ sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.
De façon générale, ayez le réflexe d'interpréter les modules en termes de longueurs et les arguments en termes d'angles orientés.

f est une fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-2\mathrm{i}\}$. f: $z \mapsto Z$
on associe à f une transformation géométrique T qui agit sur les points du plan privé de B.
$T : M \mapsto M'$ et, on trouve
au a) que la droite (AB) privée de B a pour image par T l'axe des réels
au b) que le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B a pour image par T l'axe des imaginaires
au c) que le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ a pour image par T le cercle de centre I et de rayon 1
au d) que la médiatrice de $[AB]$ a pour image par T le cercle de centre O et de rayon 1

---

exercice C page 288

À tout $z \neq -\mathrm{i}$, on associe $f(z) = \dfrac{\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}}$.
M est le point d'affixe z.
1) Résolution de $\dfrac{\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}} = 1 + 2\mathrm{i}$

Pour $z \neq -\mathrm{i}$, $\dfrac{\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}} = 1 + 2\mathrm{i}$ équivaut à $\mathrm{i}z = (1 + 2\mathrm{i})(z + \mathrm{i})$
Après développement, réduction, réorganisation des calculs, il vient: $(1 + \mathrm{i})z = 2 - \mathrm{i}$
$z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = ... = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$
Le point B d'affixe $z_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ vérifie $f(z_0) = 1 + 2\mathrm{i}$

2) $r = |z+\mathrm{i}|$ et $\alpha = \arg(z + \mathrm{i})$
Remarquer: $r > 0$ puisque $z \neq -\mathrm{i}$
$f(z) - \mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}} - \mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}z-\mathrm{i}z+1}{z+\mathrm{i}} = \dfrac{1}{z+\mathrm{i}}$
Il s'en déduit: $|f(z)-\mathrm{i}| = \left|\left(\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}\right)\right| = \dfrac{1}{|z+\mathrm{i}|} = \dfrac{1}{r}$

$\arg(f(z) - \mathrm{i}) = \arg\left(\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}\right) = \arg(1) - \arg(z + \mathrm{i}) = 0 - \alpha = -\alpha\ [2\pi]$.

3) A d'affixe $-\mathrm{i}$
a) L'ensemble $\mathscr{C}$ des points M vérifiant la condition: $|f(z)-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ est d'après la question 2), l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z+\mathrm{i}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
Or, $|z+\mathrm{i}| = AM$.
Conclusion: $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) L'ensemble $\mathscr{D}$ des points M vérifiant la condition: $\arg(f(z) - i) = \frac{\pi}{4}$ est d'après la question 2), l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\arg(z + i) = -\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Or, $\arg(z + i) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ $[2\pi]$

Conclusion: $\mathscr{D}$ est la demi-droite ouverte d'origine A et faisant un angle de $-\frac{\pi}{4}$ avec $\vec{u}$.

Pour la construire, on peut faire un triangle ADE rectangle isocèle indirect en D. La demi-droite]AE) convient.

c) B d'affixe z_0 est tel que $f(z_0) = 1 + 2i$

On a donc: $|f(z_0) - i| = |1 + i| = \sqrt{2}$. Ce qui prouve que $B \in \mathscr{C}$. *(Ce qui permet de construire $\mathscr{C}$)*

$\arg(f(z_0) - i) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$. Ce qui prouve que $B \in \mathscr{D}$. *(Ce qui permet de construire $\mathscr{D}$)*

On peut aussi faire:

$z_0 + i = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$|z_0 + i| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ce qui prouve que $B \in \mathscr{C}$.

$\arg(z_0 + i) = \arg(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.. Ce qui prouve que $B \in \mathscr{D}$.

Remarque et complément:

Comme à l'exercice précédent, les résultats s'interprètent en termes de transformation géométrique T.

À tout point $M(z)$ distinct du point $A(-i)$, on associe un point $M'(z')$ avec $z' = f(z)$. $M' = T(M)$

Vous pouvez essayer d'interpréter les autres questions de façon identique

Au 1), on montre que $T(B) = B'$ d'affixe $1 + 2i$