Index

Exercice F page 289

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O};\ \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$ (unité graphique : 2cm)

A est le point d'affixe $a = -2\mathrm{i}$

À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -2\ \bar{z}\ + 2\mathrm{i}$.

1) Le point B a pour affixe $b = 3 - 2\mathrm{i}$
Le point A' associé à A a pour affixe: $a' = -2\ \bar{a}\ + 2\mathrm{i} = -2\times (2\mathrm{i}) + 2\mathrm{i} = -2\mathrm{i}$
A' et A sont confondus.
Le point B' associé à B a pour affixe: $b' = -2\ \bar{b}\ + 2\mathrm{i} = -2\times (3 + 2\mathrm{i}) + 2\mathrm{i} = -6 - 2\mathrm{i}$

2) Un point M appartient à la droite Δ d'équation $y = -2$ si et seulement si l'affixe z de M s'écrit: $z = x - 2\ \mathrm{i}$ où x est un réel.
Le point M' associé à M a pour affixe: $z' = -2\ \bar{z}\ + 2\mathrm{i} = -2\times (x + 2\mathrm{i}) + 2\mathrm{i} = -2x - 2\mathrm{i}$
L'ordonnée de M' vaut -2, quelle que soit son abscisse.
Conclusion: M' est un point de Δ d'équation $y = -2$

3) $|z'+2\mathrm{i}| = |-2\bar{z}+2\mathrm{i}+2\mathrm{i}| = |-2\bar{z}+4\mathrm{i}| = |-2(\bar{z}-2\mathrm{i})| = |-2| \times |\overline{z+2\mathrm{i}}|$
Or, un complexe et son conjugué ont des modules égaux, d'où, $|\overline{z+2\mathrm{i}}| = |z+2\mathrm{i}|$ et comme $|-2| = 2$, l'égalité: $|z'+2\mathrm{i}| = 2\ |z+2\mathrm{i}|$ est démontrée.
Comme $z' + 2\mathrm{i}$ est l'affixe de $\overrightarrow{AM'}$ et $z + 2\mathrm{i}$ est celle de $\overrightarrow{AM}$, l'égalité des modules se traduit par:
$AM' = 2\times AM$.
Autre méthode (pour l'entraînement au calcul, mais fortement déconseillée pour comprendre les propriétés)
On pose par exemple: $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$, donc $\bar{z}\ = a - \mathrm{i}b$
$z' + 2\ \mathrm{i} = -2(a - \mathrm{i}\ b) + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i} = -2a + \mathrm{i}(2b + 4)$
$|z'+2\mathrm{i}| = \sqrt{(-2a)^2+(2b+4)^2} = \sqrt{4a^2+4b^2+16b+16} = 2\ \sqrt{a^2+b^2+4b+4}$
$|z+2\mathrm{i}| = |a+\mathrm{i}(b+2)| = \sqrt{a^2+(b+2)^2} = \sqrt{a^2+b^2+4b+4}$

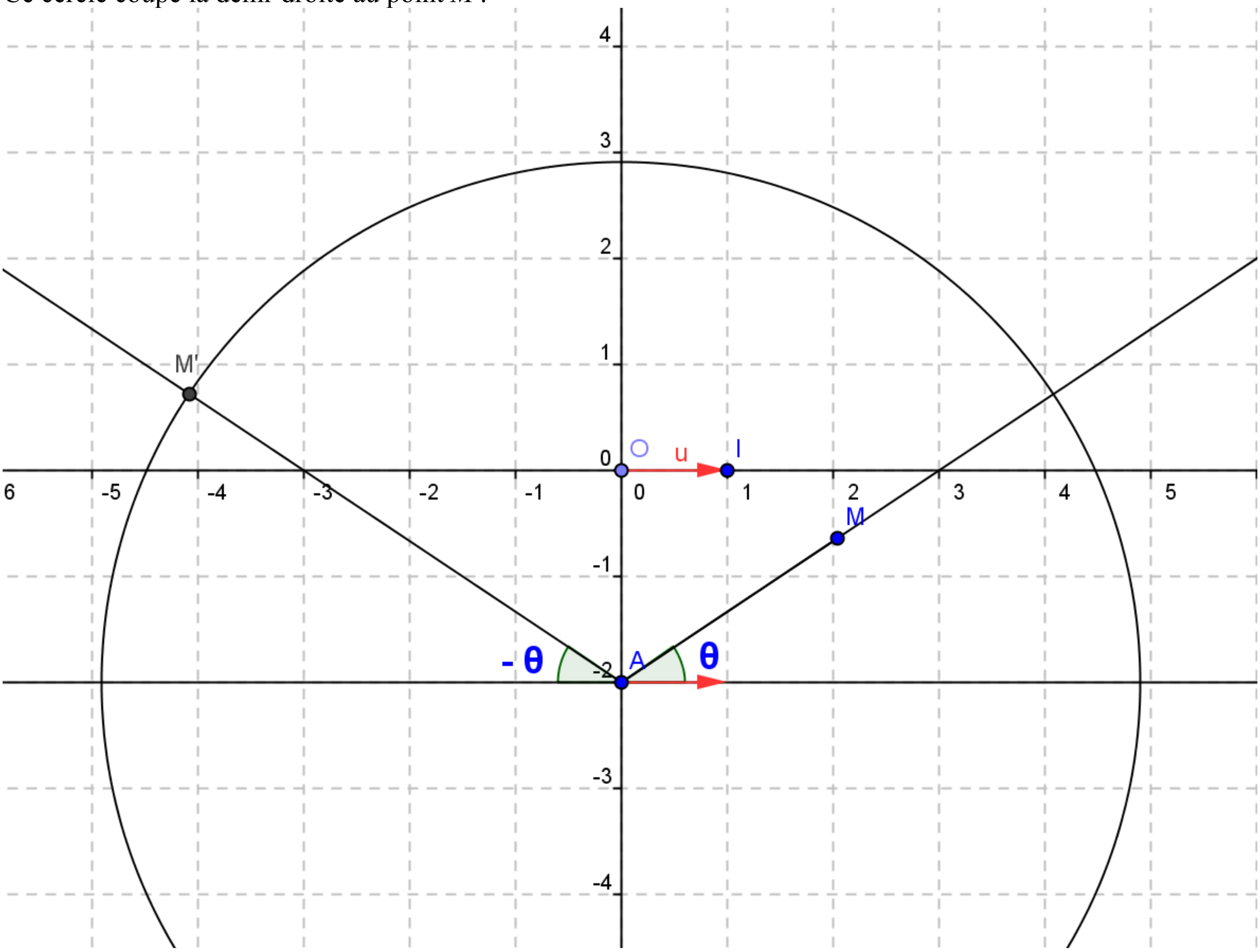
4) $M \neq A$.
θ est un argument de $z + 2\mathrm{i}$.
a) Comme $z + 2\mathrm{i}$ est l'affixe de $\overrightarrow{AM}$, un argument θ de $z + 2\mathrm{i}$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$
b) $(z + 2\mathrm{i})(z' + 2\mathrm{i}) = (z + 2\mathrm{i})(-2\ \bar{z}\ + 4\mathrm{i}) = -2(z + 2\mathrm{i})(\ \bar{z}\ - 2\mathrm{i}) = -2(z + 2\mathrm{i})\ \left(\overline{\bar{z}+2\bar{i}}\right) = -2\ |z+2\mathrm{i}|^2$
Ce qui prouve que $(z + 2\mathrm{i})(z' + 2\mathrm{i})$ est négatif ou nul (lorsque $z = -2\mathrm{i}$, c'est-à-dire: $M = A$))

Autre méthode:
$(z + 2\mathrm{i})(z' + 2\mathrm{i}) = (z + 2\mathrm{i})(-2\ \bar{z}\ + 4\mathrm{i}) = -2\ z\ \bar{z}\ + 4\mathrm{i}(z - \bar{z}\ ) - 8$
Or, $z\ \bar{z}\ = x^2 + y^2$ (module au carré) est un réel positif.
$z - \bar{z}\ = 2\mathrm{i}y$ avec y réel.
On obtient: $(z + 2\mathrm{i})(z' + 2\mathrm{i}) = -2(\ x^2 + y^2 + 4y + 4) = -2(x^2 +(y + 2)^2)$
Comme $(x^2 +(y + 2)^2)$ est une somme de réels positifs, le produit par -2 est un réel négatif ou nul. (Nul lorsque $x = 0$ et $y = -2$, c'est-à-dire: $M = A$)

c) ***Rappels:*** Un argument d'un produit est la somme des arguments.
Un argument d'un réel strictement négatif est π.
On a donc: pour $z \neq -2i$, $\arg((z+2i)(z'+2i)) = \pi$, et, $\arg((z+2i)(z'+2i)) = \arg(z+2i) + \arg(z'+2i)$
On en déduit: $\arg(z'+2i) = \pi - \theta \quad [2\pi]$.

d) Faire une figure pour accompagner l'interprétation graphique.
Les angles $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ sont supplémentaires d'après la question 3c).
Les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

5) On place un point M.
On construit la demi-droite $[At)$ symétrique de $[AM)$ par rapport à l'axe des ordonnées et le cercle de centre A et de rayon $2 \times AM$.
Ce cercle coupe la demi-droite au point M'.



19 page 155

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme des cubes des n premiers entiers naturels est égale au carré de leur somme.

La proposition P(n) : $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$

On sait: $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1)

La proposition P(n) devient: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Initialisation: $1^3 = 1$ et $\left[\dfrac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1^2 = 1$

Hérédité: Soit un entier k tel que P(k)

On a donc l'égalité $1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2$ (Hypothèse de récurrence)

(Ne pas perdre de vue que l'on veut en déduire l'égalité: $1^3 + 2^3 + ... + (k+1)^3 = \left[\dfrac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right]^2$)

Soit: $1^3 + 2^3 + ... + (k+1)^3 = [1^3 + 2^3 + ... + k^3] + (k+1)^3$ Par construction de la somme

$= \left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= (k+1)^2 \left[\left(\dfrac{k}{2}\right)^2 + k + 1\right]$ factorisation de ....

$= (k+1)^2 \left(\dfrac{k^2+4k+4}{4}\right) = (k+1)^2 \left(\dfrac{k+2}{2}\right)^2 = \left[\dfrac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right]^2$

On a montré: P(k) ⇒ P(k + 1)

Conclusion:

D'après l'axiome de récurrence, la proposition P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

23 page 155

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \exp(-u_0 - u_1 - \ldots - u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

$u_1 = \exp(-u_0) = \exp(-1) = \dfrac{1}{e}$

$n = 0$ $u_1 = \dfrac{1}{e}$ (donnée) et $u_0\exp(-u_0) = 1\times\exp(-1) = \dfrac{1}{e}$

Par définition de (u_n), $u_{n+1} = \exp(-u_0 - u_1 - ... - u_{n-1} - u_n)$

D'après la propriété fondamentale de l'exponentielle, on obtient:

$u_{n+1} = \exp(-u_0 - u_1 - ... - u_{n-1})\times\exp(-u_n)$

Or, $u_n = \exp(-u_0 - u_1 - ... - u_{n-1})$ si $n \geqslant 1$

Conclusion: pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n\exp(-u_n)$

---

33 page 91

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f: $x \mapsto 4\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

a) Comme $f(x) = \dfrac{4}{1+\dfrac{1}{e^x}}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

On en déduit que la droite d'équation $y = 4$ est asymptote en $+\infty$ et que la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote en $-\infty$.

b) f est le quotient de ... par ... dérivables sur $\mathbb{R}$.

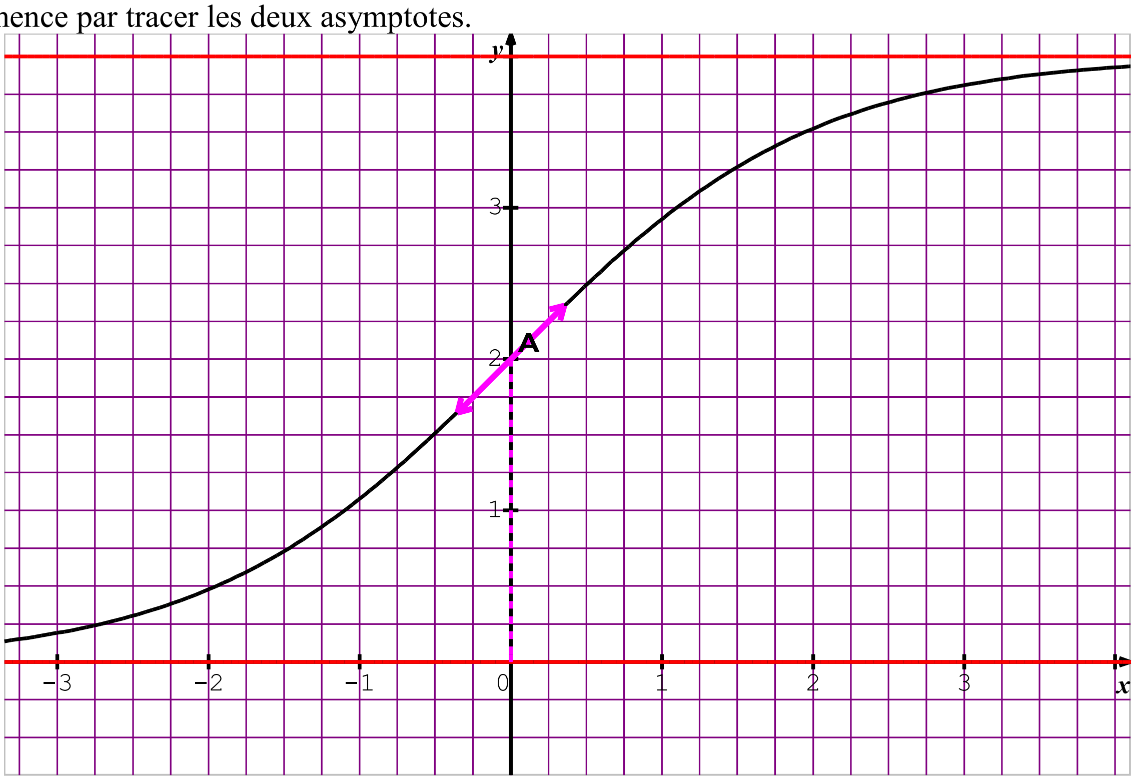
f est donc dérivable sur son domaine de définition, et, pour tout x réel,

$$f'(x) = 4 \times \frac{e^x(e^x+1)-e^x\times e^x}{(e^x+1)^2} = 4\times\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

La dérivée étant strictement positive, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 4$

c) On commence par tracer les deux asymptotes.



On place quelques points notamment $A(0; 2)$ et sa tangente de pente $f'(0) = 1$

Compléments:

Conjecture: Le graphique fait apparaître le point $A(0; 2)$ comme centre de symétrie

Preuve: $f(0 + h) + f(0 - h) = \dfrac{4e^h}{e^h+1} + \dfrac{4e^{-h}}{e^{-h}+1}$

Comme $e^h \times e^{-h} = 1$

$\dfrac{4\,\mathrm{e}^{-h}}{\mathrm{e}^{-h}+1} = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{h}}$

$f(0+h)+f(0-h) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{h}}{\mathrm{e}^{h}+1} + \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{h}} = \dfrac{4(\mathrm{e}^{h}+1)}{\mathrm{e}^{h}+1} = 4$

Comme $\dfrac{f(0+h)+f(0-h)}{2} = 2$, le point $A(0;\,2)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

---

35 page 92

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

a) f est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u : x \mapsto 1+\mathrm{e}^{-x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et u ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f = \dfrac{-u'}{u^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, d'où, $f'(x) = \dfrac{-(-\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

Comme pour tout X réel, $\mathrm{e}^{X} > 0$, $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}$ (limite de fonction composée).

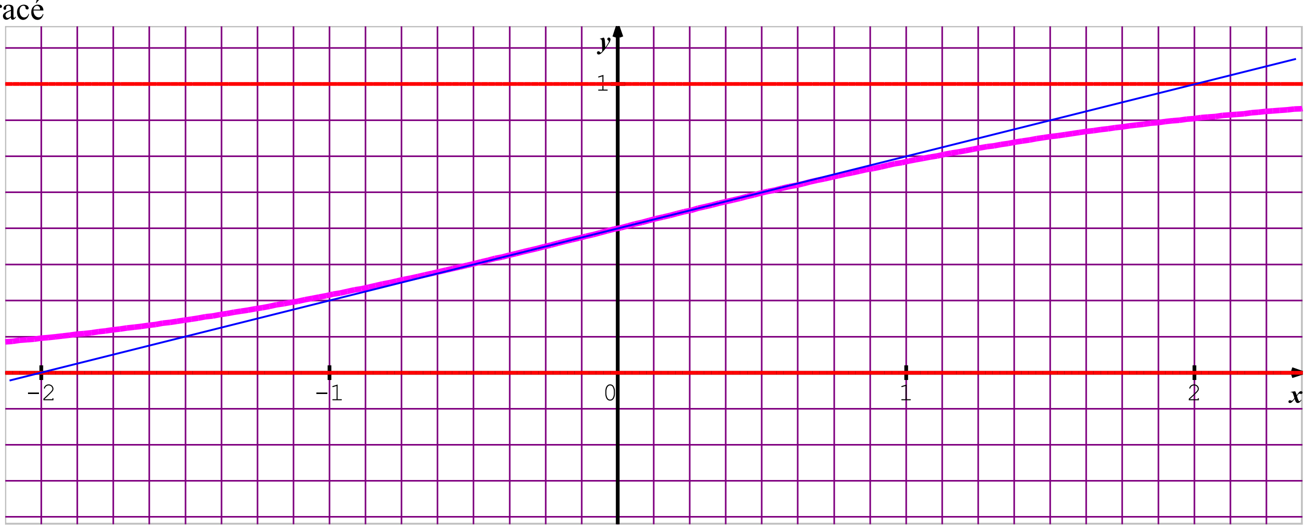
On a donc: $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+\mathrm{e}^{-x}) = +\infty$, puis, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\mathrm{e}^{-x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Tracé



c) La fonction f' est le quotient de deux fonctions u et v définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a: $u : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, d'où, $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $v : x \mapsto (1+\mathrm{e}^{-x})^2$, d'où, $v'(x) = 2\times(-\mathrm{e}^{-x})\times(1+\mathrm{e}^{-x})$

$f''(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}(1+e^{-x})^2 - 2\times(-\mathrm{e}^{-x})(1+e^{-x})\times\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^4}$ **Remarquer**: Factorisation de ....

$f''(x) = \dfrac{e^{-x}(1+e^{-x})(-(1+e^{-x})+2e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} = \dfrac{e^{-x}(-1+e^{-x})}{(1+e^{-x})^3}$

Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $(-1 + e^{-x})$

Or, $e^{-x} > 1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ....

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

f' étant croissante sur $\mathbb{R}^-$, on a: Pour $x \leqslant 0$, on a: $f'(x) \leqslant f'(0)$

f' étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a: Pour $x \geqslant 0$, on a: $f'(x) \leqslant f'(0)$

Conclusion: $f'(0) = \dfrac{1}{4}$ est le maximum de f' atteint en 0.

d) Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ en 0 est: $y = \dfrac{1}{4}(x-0) + f(0) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$, on étudie **le signe** de $d(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\right)$

Une méthode possible est d'étudier la variation de d **puisqu'on sait que $d(0) = 0$**

$d'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{4}$, d'où, $d'(x) \leqslant 0$ d'après la question c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$d''(x) = f''(x)$		$+$	0	$-$	
$d'(x)$		$-$		$-$	
$d(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	
Signe de $d(x)$		$+$		$-$	
Position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.		$\mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{T}$	Point de tangence	$\mathcal{C}$ au-dessous de $\mathcal{T}$	