Index

95 page 99 1
exercice C page 102 1
Activité 4 page 295 4
24 page 307 6
31 page 307 6

95 page 99

1/ Les solutions de l'équation (1): $y' = 2y$ sont les fonctions $x \mapsto C_1 e^{2x}$ où $C_1 \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation (2): $y' = y$ sont les fonctions $x \mapsto C_2 e^{x}$ où $C_2 \in \mathbb{R}$.

2/ a) On lit sur le graphique que $\mathcal{T}$ passe par les points de coordonnées (–1; –2) et (0; 1), d'où,

le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ est $m = \dfrac{1-(-2)}{0-(-1)} = 3$ et l'ordonnée à l'origine est $p = 1$.

Une équation de $\mathcal{T}$ est donc: $y = 3x + 1$

Le nombre dérivé $f'(0)$ est le coefficient directeur de $\mathcal{T}$, tangente à $\mathcal{C}$, au point d'abscisse 0,

d'où, $f'(0) = m = 3$

b) On sait que $f(x) = C_1 e^{2x} - C_2 e^{x}$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$

Or, $f'(x) = 2\,C_1 e^{2x} - C_2 e^{x}$

On obtient le système suivant: $\begin{cases} C_1 - C_2 = 1 \\ 2C_1 - C_2 = 3 \end{cases}$, par différence, il vient: $C_1 = 2$, puis, $C_2 = 1$

Par conséquent: pour tout réel x, $f(x) = 2\,e^{2x} - e^{x}$

c) comme $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$, on a: $\lim\limits_{x \to -\infty} 2\,e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

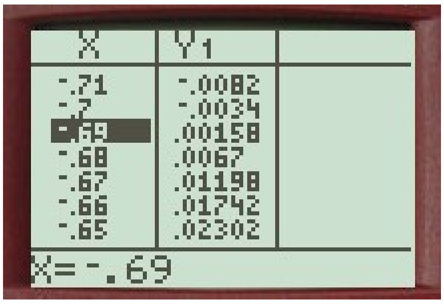
On factorise e^{x} pour déterminer la limite en $+\infty$.

$f(x) = e^{x}(2e^{x} - 1)$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$, on obtient: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) La calculatrice donne –0,69 comme valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

(Quand le chapitre sur le logarithme népérien sera fait, on aura la valeur exacte: $x = \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$)



---

exercice C page 102

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$

1) a) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin(x).\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos(x).\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin(x)+\cos(x))$

Par conséquent: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
Comme $\sqrt{2}.e^{-x} > 0$,

$f(x) = 0$ si et seulement si $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$f(x) = 0$ si et seulement si $x+\dfrac{\pi}{4} = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$,

$f(x) = 0$ si et seulement si $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

c) Comme, pour tout x réel, $-1 \leqslant \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$, et, que $\sqrt{2}.e^{-x} > 0$,

on a: $-\sqrt{2}.e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{2}.e^{-x}$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc, d'après les théorèmes sur les limites et comparaisons de fonctions, (th. des gendarmes)

il vient: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, ...

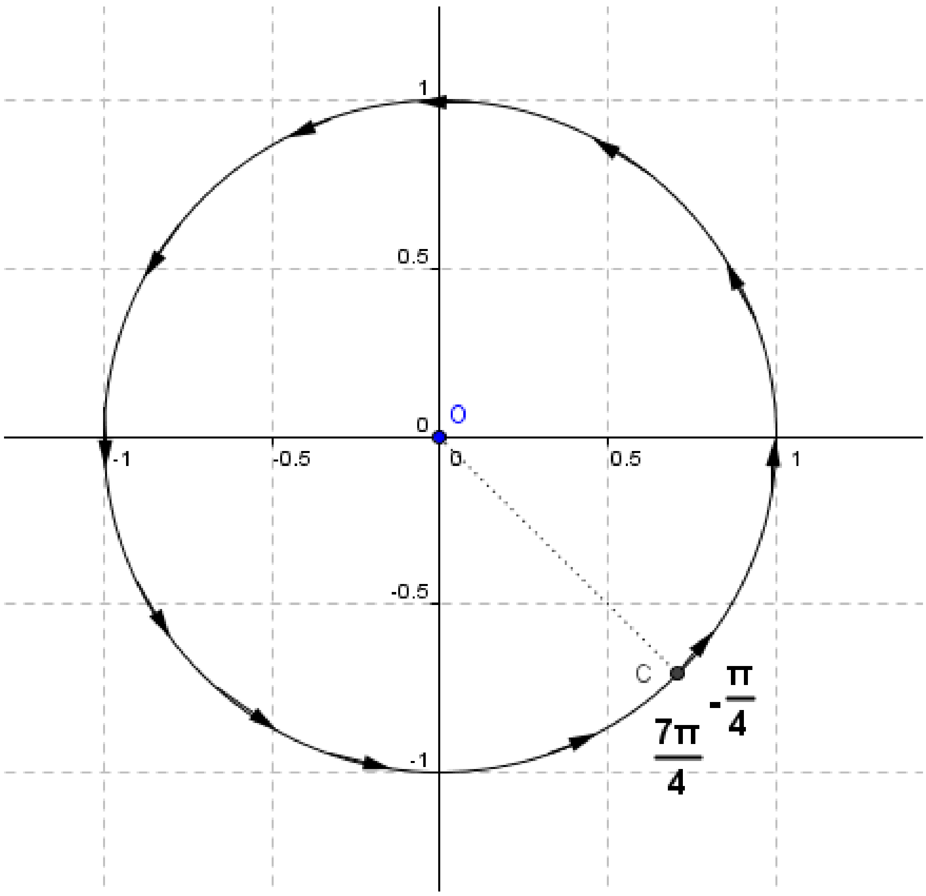
$f'(x) = -e^{-x}(\cos(x)+\sin(x))+e^{-x}(-\sin(x)+\cos(x)) = -2e^{-x}\sin(x)$

b) $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

3) Soit $I = \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4}\right]$

a) Comme $-2e^{-x} < 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe opposé de $\sin(x)$.

Remarque: on fait un tour complet en partant du point C repéré par $-\dfrac{\pi}{4}$ ....et, on applique les propriétés **connues** du sinus. (Un bon schéma vaut toutes les explications... il suffit de connaître le cercle trigo...)

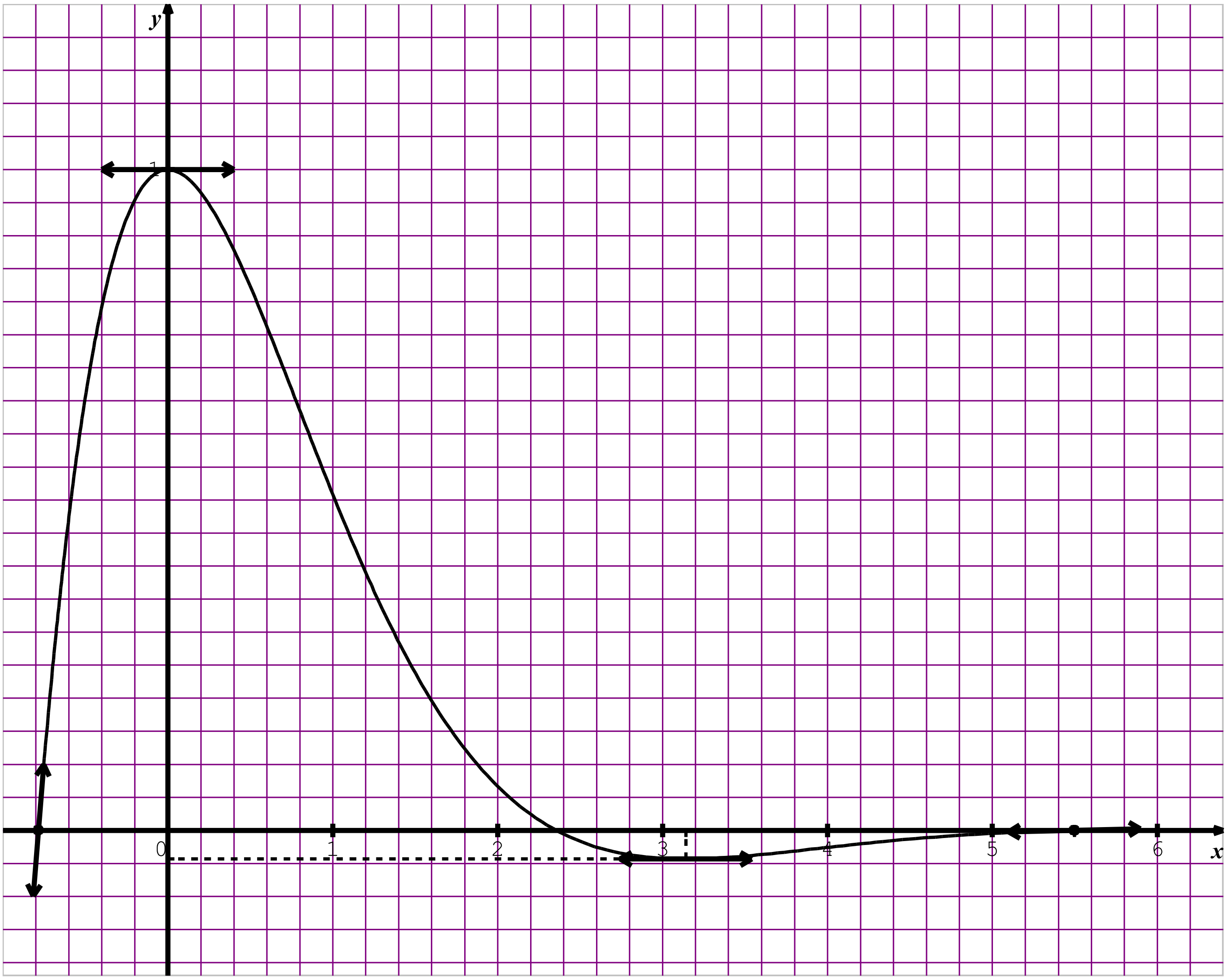


Or, la fonction sinus est strictement négative sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup \left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$ et strictement positive sur $]0;\pi[$

D'où, le tableau suivant:

x	$-\frac{\pi}{4}$		0		π		$\frac{7\pi}{4}$
$-2e^{-x}$ $\sin(x)$		$-$ $-$	0	$-$ $+$	0	$-$ $-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-e^{-\pi}$	$\nearrow$	0

b) Tracé de $\mathscr{C}$ courbe représentative de f sur I.



On marque les tangentes horizontales ... et les extremums
On calcule les coordonnées de quelques points de C_f.

Activité 4 page 295

à la question 3c/: lire H(N) = P et H(Q) = R (erreur dans certaines éditions où il est écrit: T(Q) = R)
Les questions 3b/ et 3c/ peuvent être considérées comme des R.O.C. : il s'agit de démontrer des résultats vus en cours.

f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{C}$ par :

$f(z) = \mathrm{i}z$ et $g(z) = \dfrac{3}{2}z$

1) $z = 1$ $f(1) = \mathrm{i}$, $g \circ f(1) = g(\mathrm{i}) = \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$, $f \circ g \circ f(1) = f(\dfrac{3}{2}\mathrm{i}) = -\dfrac{3}{2}$, $g \circ f \circ g \circ f(1) = g(-\dfrac{3}{2}) = -\dfrac{9}{4}$

2) $z = 2 + \mathrm{i}$ $f(2+\mathrm{i}) = \mathrm{i}(2+\mathrm{i}) = -1 + 2\mathrm{i}$

$g \circ f(2+\mathrm{i}) = g(-1+2\mathrm{i}) = \dfrac{3}{2}(-1+2\mathrm{i}) = -\dfrac{3}{2} + 3\mathrm{i}$,

$f \circ g \circ f(2 + \mathrm{i}) = f(-\dfrac{3}{2} + 3\mathrm{i}) = \mathrm{i}(-\dfrac{3}{2} + 3\mathrm{i}) = -3 - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$,

$g \circ f \circ g \circ f(2 + \mathrm{i}) = g(-3 - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}) = \dfrac{3}{2}(-3 - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}) = -\dfrac{9}{2} - \dfrac{9}{4}\mathrm{i}$.

3) $M(z)$

a) N a pour affixe $f(z)) = \mathrm{i}z$

P a pour affixe $g \circ f(z)) = g(\mathrm{i}z) = \dfrac{3}{2}\mathrm{i}z$,

Q a pour affixe $f \circ g \circ f(z) = f(\dfrac{3}{2}\mathrm{i}z) = -\dfrac{3}{2}z$,

R a pour affixe $g \circ f \circ g \circ f(z) = g(-\dfrac{3}{2}z) = -\dfrac{9}{4}z$

b) On a:

Pour $M \neq O$

$OM = |z|$ et $ON = |\mathrm{i}z| = |\mathrm{i}| \times |z| = |z| = OM$.

et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \arg \dfrac{\mathrm{i}z}{z} = \arg(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Le point N se déduit de M par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Si $M = O$ alors $N = O$.

Le point O est invariant par T.

T est la rotation de centre O.

c) Pour $M \neq O$

On sait: $ON = |z|$

$OP = \left|\dfrac{3}{2}\mathrm{i}z\right| = \dfrac{3}{2}|z| = \dfrac{3}{2}ON$.

$(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) = \arg \dfrac{\frac{3}{2}\mathrm{i}z}{\mathrm{i}z} = \arg(\dfrac{3}{2}) = 0 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Les points O, N, P sont alignés dans cet ordre.

Le point P se déduit du point N par une homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

Si $M = O$ alors $N = O$ et $P = O$

Le point O est invariant par H.

H est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

4) Si $z = a + \mathrm{i}b$, a et b réels,

les coordonnées cartésiennes de M sont $(a; b)$

de $N(-b; a)$, car, $\mathrm{i}(a + \mathrm{i}b) = -b + \mathrm{i}a$

de $P(-\frac{3}{2}b;\ \frac{3}{2}a)$ car $\frac{3}{2}(-b+\mathrm{i}a) = -\frac{3}{2}b + \mathrm{i}\frac{3}{2}a$

de $Q(-\frac{3}{2}a;\ -\frac{3}{2}b)$ car $\mathrm{i}(-\frac{3}{2}b + \mathrm{i}\frac{3}{2}a) = -\frac{3}{2}a - \mathrm{i}\frac{3}{2}b$

de $R(-\frac{9}{4}a;\ -\frac{9}{4}b)$ car $\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}a - \mathrm{i}\frac{3}{2}b) = -\frac{9}{4}a - \mathrm{i}\frac{9}{4}b$

---

24 page 307

$z_A = 1 + \mathrm{i}$

$z_B = 4 + 2\mathrm{i}$

$z_C = -5 - \mathrm{i}$

l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est: $z_B - z_A = 3 + \mathrm{i}$

celle de $\overrightarrow{AC}$ est $z_C - z_A = -6 - 2\mathrm{i} = -2(3 + \mathrm{i}) = -2(z_B - z_A)$

On a donc: $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens opposés.

---

31 page 307

A, B, C ont pour affixes respectives: $a = 2$, $b = 4 - 4\mathrm{i}$, $c = 4 + \mathrm{i}$

1) $\frac{b-a}{c-a} = \frac{4-4\mathrm{i}-2}{4+\mathrm{i}-2} = \frac{(2-4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5} = -2\mathrm{i}$

2) L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$ et celle de $\overrightarrow{AC}$ est $c - a$.

On déduit du 1): $b - a = -2\mathrm{i}(c - a)$

$\arg(b - a) = \arg[-2\mathrm{i}(c - a)] = \arg(-2) + \arg(\mathrm{i}) + \arg(c - a) + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \pi + \frac{\pi}{2} + (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sobt orthogonaux.
