Index

Exercice A page 102 (Bac S La réunion juin 2004)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie:
(1) pour tout x réel, $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$
(2) $f'(0) = 1$
(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
1 a) $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1 \Leftrightarrow (f'(x))^2 = 1 + (f(x))^2$
Comme $(f(x))^2 \geqslant 0$, on a: $(f'(x))^2 \geqslant 1$, soit: $f'(x) \leqslant -1$ ou $f'(x) \geqslant 1$.
pour tout x réel, $f'(x) \neq 0$
ou par l'absurde:
Supposons qu'il existe une valeur a réelle telle que $f'(a) = 0$, on a alors d'après (1): $-(f(a))^2 = 1$, ce qui est impossible.
Il n'existe aucun réel x tel que $f'(x) = 0$
pour tout x réel, $f'(x) \neq 0$

b) D'après (1), $(f'(0))^2 - (f(0))^2 = 1$ et d'après (2): $(f'(0))^2 = 1$
Par conséquent: $(f(0))^2 = 0$
Conclusion: $f(0) = 0$

2) D'après (3), f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Le premier membre de l'égalité (1) se dérive en $x \mapsto 2\times f''(x)\times f'(x) - 2\times f'(x)\times f(x)$

Le second membre de l'égalité (1) se dérive en $x \mapsto 0$

L'égalité (1) implique: $2\times f''(x)\times f'(x) - 2\times f'(x)\times f(x) = 0$, soit
$2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0$
Comme $f'(x) \neq 0$, il vient $f''(x) - f(x) = 0$
(4): Pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$.

3) On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
a) $u(0) = f'(0) - f(0) = 1$ et $v(0) = \ldots = 1$

b) u et v, étant la somme ou la différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
pour tout x réel, $u'(x) = f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) = u(x)$ (car $f''(x) = f(x)$)
pour tout x réel, $v'(x) = f''(x) - f'(x) = f(x) - f'(x) = -(f'(x) - f(x)) = -v(x)$.

c) La fonction u est donc la solution de l'équation différentielle $y' = y$ prenant la valeur 1 en 0.
On sait d'après le cours que c'est la fonction exponentielle de base e.
Pour tout x réel, $u(x) = e^x$

La fonction v est donc la solution de l'équation différentielle $y' = -y$ prenant la valeur 1 en 0.
On a alors: pour tout x réel, $v(x) = Ce^{-x}$ et $v(0) = 1$, d'où, $C = 1$
Pour tout x réel, $v(x) = e^{-x}$

d) Par définition de u et v, on a: $2f = u - v$,
d'où, pour tout x réel, $2f(x) = e^x - e^{-x}$

$f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

4a) On sait: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc, (somme de fonctions) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
et
$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (Soit on remarque $2f' = u + v$, soit on dérive ...)

Comme pour tout X, $e^X > 0$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur ℝ.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

5) a) D'après les questions précédentes:
f est dérivable sur ℝ, donc, continue sur ℝ.
f est strictement croissante sur ℝ,
donc, f réalise une bijection de ℝ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f(x)\,;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)[= \mathbb{R}$.
Conclusion:
Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = m$ a une et une seule solution réelle.

b) $f(x) = 3$ a pour solution α telle que $f(\alpha) = 3$

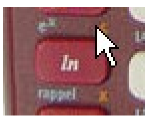
Résolution de $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 3$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 6$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 6e^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 6X - 1 = 0 \end{cases}$$

Résolution de l'équation du second degré: discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 40 = 2\ \sqrt{10}$
L'équation en X a deux solutions: $X_1 = 3 - \sqrt{10}$ et $X_2 = 3 + \sqrt{10}$
Comme $e^x > 0$, la seule solution acceptable est $e^x = 3 + \sqrt{10}$.
On cherche donc l'antécédent par la fonction exponentielle de $3 + \sqrt{10}$
$x = \ln(3 + \sqrt{10})$
La calculatrice donne : la fonction réciproque de l'exp; est la fonction ln.



$\alpha = 1{,}82$ à 10^{-2} près par excès.

Exercice B page 102 (Bac S France juin 2004)

Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle (E): $25x' + 200x'' = 50$

où x' est la dérivée première et x'' la dérivée seconde de la fonction x par rapport au temps

x est la loi horaire (fonction en mathématique) du mouvement.
Le terme $25\,x'$ est la valeur de la force de frottement due à la résistance (x' est la fonction donnant la vitesse)

Le terme $200x''$ est la valeur de la force due à l'accélération pour une masse de 200 kg.

50 est la valeur de la force d'entraînement.

Dans tout l'exercice $t \geqslant 0$

1) On pose $v(t) = x'(t)$ d'où, $v'(t) = x''(t)$.

En remplaçant dans(E): on a:

$$\begin{cases} 25x' + 200x'' = 50 \\ v(t) = x'(t) \\ v'(t) = x''(t) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 25v(t) + 200v'(t) = 50 \\ v(t) = x'(t) \\ v'(t) = x''(t) \end{cases}$$

En divisant par 200 et en réorganisant, on a: (E) équivaut à (F): $v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.

(Ne pas oublier de montrer l'équivalence)

L'équation (F) est de la forme $y' = ay + b$, d'où, en appliquant le cours, il vient:

avec $a = -\dfrac{1}{8}$, $b = \dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{b}{a} = 2$

Pour $t \geqslant 0$, $v(t) = C\,e^{-\frac{1}{8}t} + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2) Les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

a) On a: $x'(t) = v(t) = C\,e^{-\frac{1}{8}t} + 2$ et $v(0) = 0$,

d'où, $C\,e^0 + 2 = 0$, soit: $C = -2$, puisque $e^0 = 1$.

$x'(t) = -2\,e^{-\frac{1}{8}t} + 2$

b) Les fonctions x qui ont pour dérivée x' sont de la forme:

$x(t) = -2 \times \dfrac{1}{-\frac{1}{8}} \times e^{-\frac{1}{8}t} + 2t + K$ où $K \in \mathbb{R}$.

Soit $x(t) = 16\,e^{-\frac{1}{8}t} + 2t + K$ où $K \in \mathbb{R}$.
Or, $x(0) = 0$, d'où, $16 + K = 0$.

Conclusion: $x(t) = 16\,e^{-\frac{1}{8}t} + 2t - 16$ avec $t \geqslant 0$

On sait: $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, d'où, comme $\lim\limits_{t \to +\infty} -\dfrac{1}{8}t = -\infty$, on a, d'après la limite de fonction composée:

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{1}{8}t} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.

Conclusion: $\lim\limits_{t \to +\infty} (-2\,e^{-\frac{1}{8}t} + 2) = 2$

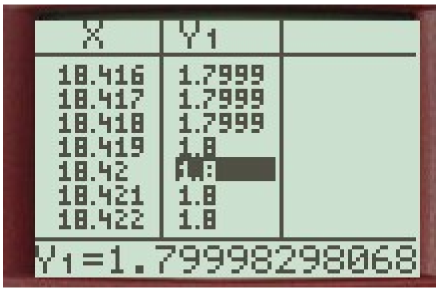
La vitesse limite $V = 2$ (m.s^{-1})

On cherche t telle que $v(t) \leqslant 0{,}9 \times V$, soit, $-2\,e^{-\frac{1}{8}t} + 2 \leqslant 1{,}8$

$-2\,e^{-\frac{1}{8}t} + 2 \leqslant 1{,}8$ équivaut à $e^{-\frac{1}{8}t} \geqslant 0{,}1$

Avant d'étudier le logarithme népérien:

En remarquant que la fonction v est croissante, un encadrement à la calculatrice donne:



$t \geqslant 18{,}421$ (valeur approchée à 10^{-3})

Après l'étude le logarithme népérien:

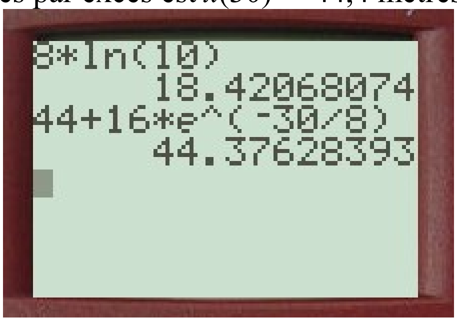
$e^{-\frac{1}{8}t} \geqslant 0{,}1$ équivaut à $-\dfrac{1}{8}\,t \leqslant \ln 0{,}1$ Or, $\ln 0{,}1 = -\ln 10$

d'où, $v(t) \leqslant 0{,}9 \times V$ équivaut à $t \geqslant 8 \ln 10$

Une valeur approchée de $8 \ln 10$ est 18,4206 ...

La distance parcourue en 30 secondes est $x(30) = 2 \times 30 - 16 + 16\,e^{-\frac{30}{8}} = 44 + 16\,e^{-\frac{30}{8}}$

Une valeur approchée au décimètre près par excès est $x(30) \approx 44{,}4$ mètres



---

exercice C page 222 Baccalauréat S Centres étrangers juin 2004

Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard, il prend le bus de la ville, il lui en coûte 1,50 €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$; s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul *n*, on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour *n* ». On note p_n , la probabilité de R_n et q_n , celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.

(Voir l'arbre de probabilité à la fin de l'exercice)

a. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{Rn}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{Rn}}(R_{n+1})$.

$p_{Rn}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$ (Traduction de la phrase: s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.)

$p_{\overline{Rn}}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$ (Traduction de la phrase: Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$.)

b. Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de q_n .

$p(R_{n+1} \cap R_n) = p_{Rn}(R_{n+1}) \times p(R_n) = \frac{1}{20} p_n$.

$p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = p_{\overline{Rn}}(R_{n+1}) \times p(\overline{R_n}) = \frac{1}{5} q_n$

c. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n .

$p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_{n+1} \cap R_n) + p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5} q_n$

d. En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$.

Or, $p_n + q_n = 1$, d'où, $p_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n) = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$.

2. Étude de la suite (p_n)..

Pour tout entier naturel non nul *n*, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

Méthode:

On exprime le **nombre** v_{n+1} en fonction du nombre v_n

Pour cela: d'après la définition de la **suite** (v_n), on écrit le nombre v_{n+1} en fonction du nombre p_{n+1}

puis, d'après l'égalité définissant la suite (p_n) on exprime v_{n+1} en fonction de p_n

et on revient par l'égalité définissant la suite (v_n) à une relation en fonction de v_n.

Calculs:

$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{23}$ d'après la définition de la suite (v_n)

$v_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n - \frac{4}{23}$ d'après la définition de la suite (p_n)

Or, $p_n = v_n + \frac{4}{23}$, d'après la définition de la suite (v_n)

d'où, $v_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}(v_n + \frac{4}{23}) - \frac{4}{23} = -\frac{3}{20} v_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{20} \times \frac{4}{23} - \frac{4}{23}$

Comme $\frac{1}{5} - \frac{3}{20} \times \frac{4}{23} - \frac{4}{23} = \frac{1}{5} - \frac{4}{23}(\frac{3}{20} + 1) = \frac{1}{5} - \frac{4}{23} \times \frac{23}{20} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$

On en déduit: $v_{n+1} = -\frac{3}{20} v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$ de premier terme $v_1 = 0 - \frac{4}{23} = -\frac{4}{23}$.

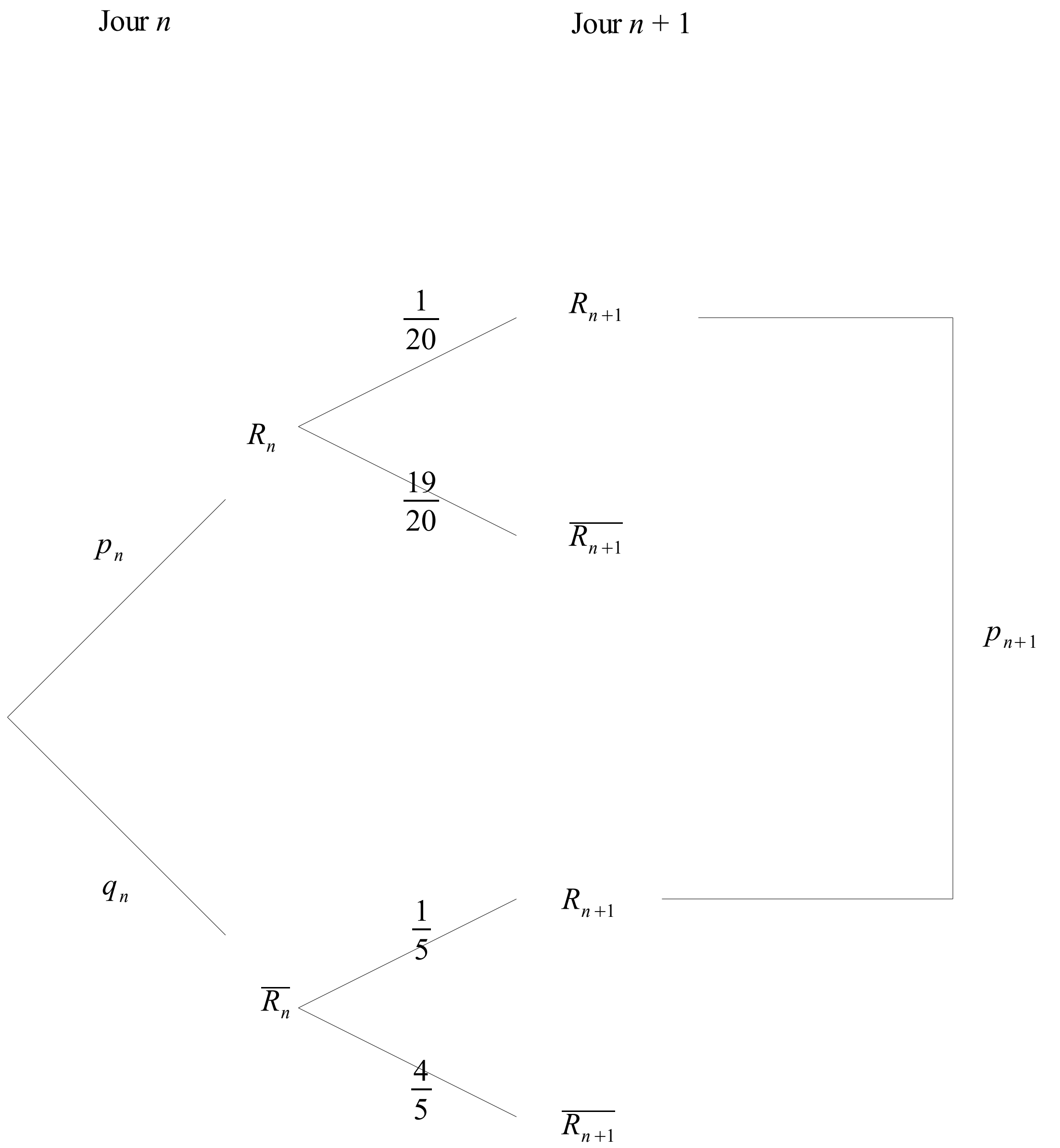
b. Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

Par conséquent: $v_n = -\frac{4}{23}\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1}$ et $p_n = -\frac{4}{23}\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} + \frac{4}{23}$.

c. Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

Comme $-1 < -\frac{3}{20} < 1$, la suite géométrique (v_n) converge vers 0, et, la suite (p_n) converge vers $\frac{4}{23}$.

Arbre de probabilité



Exercice E page 317 .Nouvelle–Calédonie novembre 2000

1.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = -4 = 4i^2 = (2\,i)^2$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ sont donc les complexes conjugués: $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + i$

Préciser le module et un argument de chacune des solutions.

$|1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$ et **un** argument θ_1 de z_1 est $-\frac{\pi}{4}$ et θ_2 de z_2 est $\theta_2 = -\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

Écriture exponentielle des solutions: $z_1 = \sqrt{2}\ e^{-i\pi/4}$ et $z_2 = \sqrt{2}\ e^{i\pi/4}$

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$.

D'après le a), les solutions de cette équation sont les solutions des deux équations suivantes:

$-iz + 3i + 3 = 1 - i$ et $-iz + 3i + 3 = 1 + i$

$-iz + 3i + 3 = 1 - i \Leftrightarrow -iz = -2 - 4i \Leftrightarrow z = -2i + 4$ (remarquer: $-iz \times i = z$)

$-iz + 3i + 3 = 1 + i \Leftrightarrow -iz = -2 - 2i \Leftrightarrow z = -2i + 2$

Les solutions de $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$ sont $\{4 - 2i; 2 - 2i\}$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 2z_B$.

a. Déterminer les formes algébriques de z_B et z_C.

$z_A = 1 + i$, $z_B = \overline{z_A} = 1 - i$, $z_C = 2z_B = 2 - 2i$.

b. Placer les points *A*, *B* et *C*

c. Montrer que les points *A*, *B* et *C* appartiennent au cercle ($\mathscr{C}$)de centre *I* d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.

$IA = |z_A - z_I| = |1+i-3| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$

$IB = \ldots. = |-2-i| = \sqrt{5}$

$IC = \ldots = |-1-2i| = \sqrt{5}$

d. Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$.

$$\frac{z_C-3}{z_A-3} = \frac{-1-2i}{-2+i} = \frac{i(i-2)}{-2+i} = i$$

en déduire la nature du triangle *IAC*.

Le résultat précédent montre que: $z_C - z_I = i(z_A - z_I)$, d'où,

C est l'image de *A* dans la rotation de centre *I* et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (quart de tour de centre *I* direct)

IAC est un triangle rectangle isocèle direct en *I* .

e. Le point *E* est l'image du point *O* par la translation de vecteur 2 $\overrightarrow{IC}$. Déterminer l'affixe du point *E*.

L'affixe de 2 $\overrightarrow{IC}$ est $2(-1 - 2i) = -2 - 4i$

On a donc $z_E = 0 + (-2 - 4i) = -2 - 4i$

f. Le point *D* est l'image du point *E* par la rotation de centre *O* et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe du point *D*.

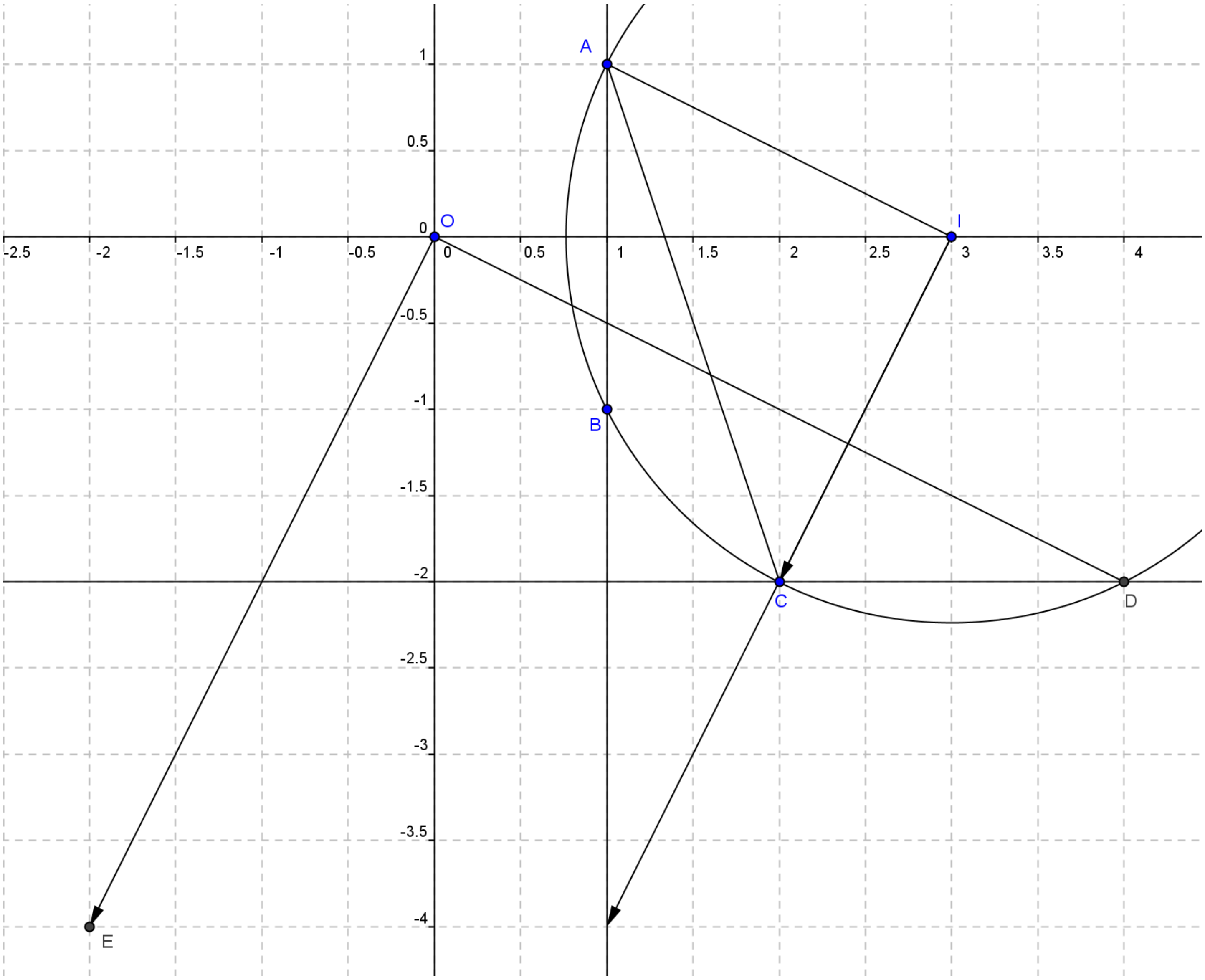
D'après l'écriture complexe d'une rotation, on a: $z_D - z_O = e^{i\pi/2}(z_E - z_O)$

$z_D = iz_E = 4 - 2i$

g. Démontrer que les droites (*AB*) et (*CD*) sont perpendiculaires.

La droite (*AB*) est parallèle à l'axe des ordonnées puisque les points *A* et *B* ont la même abscisse (leurs affixes sont des complexes conjugués)

La droite (*CD*) est parallèle à l'axe des abscisses puisque les points *C* et *D* ont la même ordonnée –2.



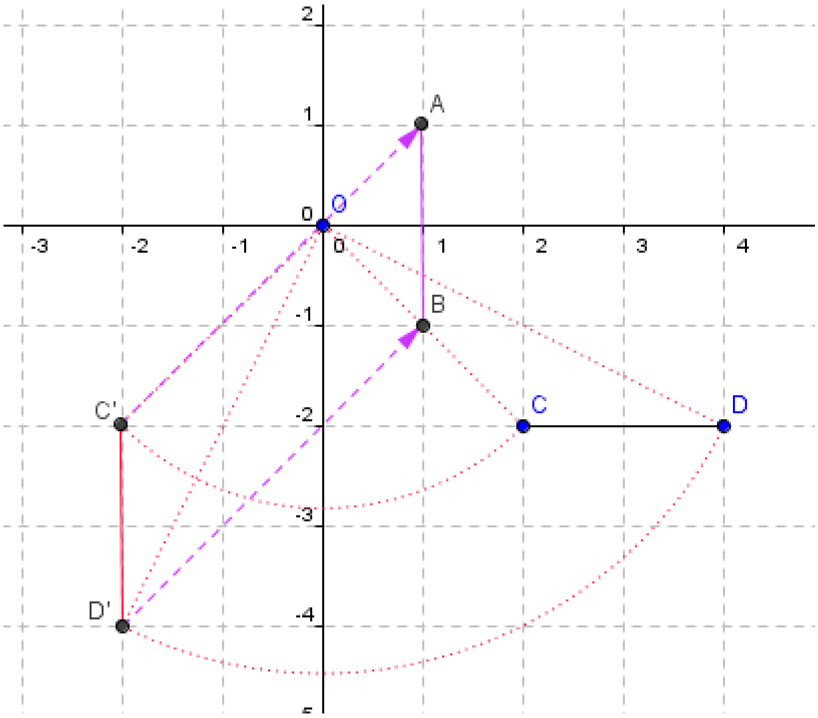
Quelques remarques à propos des 1a) et 1b)

On considère la transformation $T : z \mapsto -\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3$ qui peut se décomposer en une rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ suivie d'une translation t de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $3 + 3\mathrm{i}$.

En effet : $z \overset{r}{\to} -\mathrm{i}z \overset{t}{\to} -\mathrm{i}z + 3 + 3\mathrm{i}$

D'après les calculs du 1b), le point C d'affixe $2 - 2\mathrm{i}$ a pour image par T le point A d'affixe $1 + \mathrm{i}$.

et le point D d'affixe $4 - 2\mathrm{i}$ a pour image par T le point B d'affixe $1 - \mathrm{i}$.



Le segment $[CD]$ a pour image un segment $[C'D']$ par r tel que $CD = C'D'$ et $(CD) \perp (C'D')$
et le segment $[C'D']$ a pour image le segment $[AB]$ tel que $AB = C'D'$ et $(AB) \parallel (C'D')$

Autre remarque:

En montrant au 2d) que $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3} = \mathrm{i}$, on montre que C est l'image de A par la rotation de centre I d'affixe 3 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On montre de même façon que $\dfrac{z_D - 3}{z_B - 3} = \mathrm{i}$ ($z_D - 3 = 4 - 2\mathrm{i} - 3 = 1 - 2\mathrm{i}$ et $z_B - 3 = 1 - \mathrm{i} - 3 = -2 - \mathrm{i}$
et $\mathrm{i}(-2 - \mathrm{i}) = 1 - 2\mathrm{i}$)

Le segment $[CD]$ est donc l'image du segment $[AB]$ par la rotation de centre I d'affixe 3 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$., d'où, $AB = CD$ et $(AB) \perp (CD)$