DM 7 à rendre le lundi 14 février 2011

Trois petits exercices pour réviser le produit scalaire dans le plan:
8 page 334
17 page 334
21 page 335

Exercices type bac:
Exercice A page 344
Exercice B page 378

Distance d'un point à une droite.	**Distance d'un point à un plan.**
Soit une droite $\mathscr{D}$ d'un plan. Soit un point A dans ce plan. La distance de A à $\mathscr{D}$ est définie comme la plus courte de toutes les distances de A à un point M de $\mathscr{D}$. C'est aussi la distance de A à H où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$. On a donc selon les points de vue des méthodes qui en découlent. Si, et c'est le luxe, les objets sont dans un repère orthonormal, on obtient une formule	Soit un plan $\mathscr{P}$. Soit un point A. La distance de A à $\mathscr{P}$ est définie comme la plus courte de toutes les distances de A à un point M de $\mathscr{P}$. C'est aussi la distance de A à H où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$. On a donc selon les points de vue des méthodes qui en découlent. Si, et c'est le luxe, les objets sont dans un repère orthonormal, on obtient une formule ....
Premier point de vue: On arrive à exprimer la distance AM en fonction d'un réel t qui varie avec M. On a donc : $AM = f(t)$ où t donne la position de M sur $\mathscr{D}$. Il reste à étudier f et à déterminer son minimum.	***Premier point de vue:*** On arrive à exprimer la distance AM en fonction d'un réel t qui varie avec M. On a donc : $AM = f(t)$ où t donne la position de M dans $\mathscr{P}$. Il reste à étudier f et à déterminer son minimum.
Deuxième point de vue: On sait déterminer le projeté orthogonal H et on a une configuration qui permet de calculer AH. (Par exemple, AH est la hauteur d'un triangle dont on peut calculer l'aire et la base relative à cette hauteur)	***Deuxième point de vue:*** On sait déterminer le projeté orthogonal H et on a une configuration qui permet de calculer AH. (Par exemple, AH est la hauteur d'un tétraèdre dont on peut calculer le volume et l'aire de la base relative à cette hauteur)
Troisième point de vue: Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal. On pose $A(x_A; y_A)$, $H(x_H; y_H)$ Une équation de $\mathscr{D}$: $ax + by + c = 0$, donc $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$. On calcule $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$ de deux façons différentes (c'est tout l'intérêt du produit scalaire)	***Troisième point de vue:*** Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal. On pose $A(x_A; y_A; z_A)$, $H(x_H; y_H; z_H)$ Une équation de $\mathscr{P}$: $ax + by + cz + d = 0$, donc $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$. On calcule $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$ de deux façons différentes (c'est tout l'intérêt du produit scalaire)
Façon 1: (avec les coordonnées) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H - x_A\\y_H - y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A)$ $= ax_H - ax_A + by_H - by_A$ (1) et, comme on n'a pas oublié que H était sur $\mathscr{D}$, on a: $ax_H + by_H + c = 0$, soit: $ax_H + by_H = -c$. ce qui mène en remplaçant dans (1) à:	***Façon 1: (avec les coordonnées)*** $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H - x_A\\y_H - y_A\\z_H - z_A\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A)$ $= ax_H - ax_A + by_H - by_A + cz_H - cz_A$ (1) et, comme on n'a pas oublié que H était dans $\mathscr{P}$, on a: $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$, soit: $ax_H + by_H + cz_H = -d$.

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} = -ax_A - by_A - c$

Façon 2: (avec les projetés orthogonaux)

On a (par construction), $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ colinéaires .... (ils sont tous les deux orthogonaux à $\mathscr{D}$)

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} = \begin{cases} -\|\overrightarrow{AH}\|\times\|\vec{n}\| \\ \|\overrightarrow{AH}\|\times\|\vec{n}\| \end{cases}$ selon que $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont de sens opposés on non.

Conclusion:

En prenant, $|\overrightarrow{AH}\,.\,\vec{n}| = \|\overrightarrow{AH}\|\,.\,\|\vec{n}\|$, on tire $AH = \|\overrightarrow{AH}\|$ de l'égalité:

$\|\overrightarrow{AH}\|\,.\,\|\vec{n}\| = |-ax_A - by_A - c| = |ax_A + by_A + c|$

Comme $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2}$,

on obtient: $AH = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ce qui mène en remplaçant dans (1) à:

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} = -ax_A - by_A - cz_A - d$

Façon 2: (avec les projetés orthogonaux)

On a (par construction), $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ colinéaires .... (ils sont tous les deux orthogonaux à $\mathscr{P}$)

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} = \begin{cases} -\|\overrightarrow{AH}\|\times\|\vec{n}\| \\ \|\overrightarrow{AH}\|\times\|\vec{n}\| \end{cases}$ selon que $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont de sens opposés on non.

Conclusion:

En prenant, $|\overrightarrow{AH}\,.\,\vec{n}| = \|\overrightarrow{AH}\|\,.\,\|\vec{n}\|$, on tire $AH = \|\overrightarrow{AH}\|$ de l'égalité:

$\|\overrightarrow{AH}\|\,.\,\|\vec{n}\| = |-ax_A - by_A - cz_A - d| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$

Comme $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$,

on obtient: $AH = \dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Exemple 1/

Dans le triangle ABC rectangle en A avec $AB = 3$, $AC = 4$, calculer ***la distance du point A à la droite (BC).***

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Aire du triangle: $\dfrac{AB\times AC}{2} = \dfrac{BC\times AH}{2}$

Aire de ABC: $\mathscr{A} = \dfrac{3\times4}{2} = 6$

Calcul de BC: Théorème de Pythagore: $BC^2 = ... = 25$, d'où, $BC = 5$

$AH = \dfrac{6\times2}{5} = 2{,}4$

Exemple 2/

$ABCD$ est un rectangle avec $AB = 4$ et $AD = 3$.

E est le point défini par $\overrightarrow{AE} = 5\ \overrightarrow{AC}$

Calculer la distance de E à la droite (BD).

On se place par exemple dans le repère orthonormal tel que $A(0;\,0)$, $B(4;\,0)$; $C(4;\,3)$ et $D(0;\,3)$

On a donc: $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à (DB) est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

Pour tout point $M(x;\,y)$ de (DB), on a: $\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n} = 0$, d'où: $3(x-4) + 4(y-0) = 0$ est une équation de (BD).

$3x + 4y - 12 = 0$ est une équation de (BD).

Or, $\overrightarrow{AE} = 5\ \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, d'où, $E(20;\,15)$

La distance $d(E, (BD)) = \dfrac{|3\times20+4\times15-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{108}{5}$

Exemple 3

Exercices dans l'espace ...