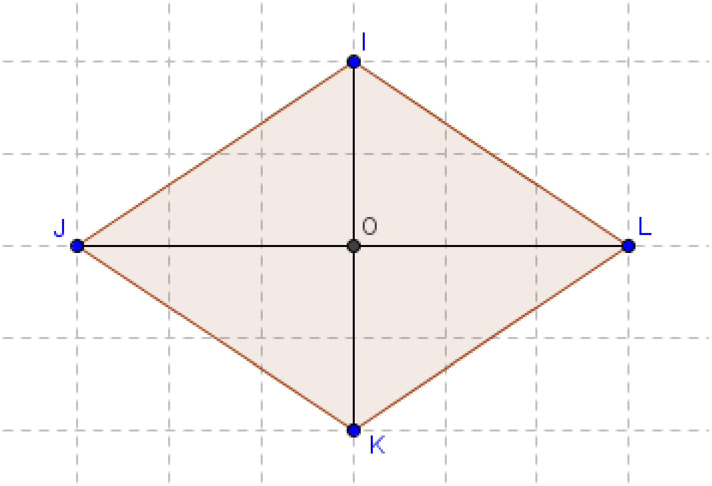
8 page 334

IJKL est un losange tel que $IK = 4$ et $JL = 6$. (Autrement dit : les longueurs des diagonales)



En appelant O le centre du losange et en sachant que les diagonales sont perpendiculaires en O, que $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JK}$, on obtient :

1) $\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{LJ} = \overrightarrow{OL}\cdot\overrightarrow{LJ} = -\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{LJ}^{\,2} = -\dfrac{1}{2}\ LJ^2 = -18$

$\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{IL} = IL^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

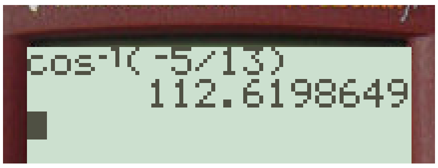
$\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IO}\cdot\overrightarrow{IK} = \dfrac{1}{2}\ IK^2 = 8$

2) $\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{IJ} = IL.IJ.\cos\left(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IJ}\right)$

$\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IL}\cdot\left(\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{LJ}\right) = \overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{IL} + \overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{LJ} = 13 - 18 = -5$

De l'égalité : $IL.IJ.\cos\left(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IJ}\right) = -5$ et comme $IL = IJ = \sqrt{13}$, on obtient : $\cos\left(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IJ}\right) = \dfrac{-5}{13}$

Approximation (en degré) :



La calculatrice donne $\widehat{JIL} \approx 112{,}6°$

---

17 page 334

Dans un repère orthonormal du plan, $A(1\ ;\ 2)$, $B(-3\ ;\ 1)$ et I milieu de $[AB]$.

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ est la perpendiculaire à (AB) passant par A.

C'est donc la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -4(x-1) + (-1)(y-2) = -4x - y + 6$

L'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ est caractérisée par l'équation $-4x - y + 6 = 0$

(ou encore : $y = 4x - 6$)

2) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-3-x\\1-y\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (1-x)(-3-x) + (2-y)(1-y) = -3 + 2x + x^2 + 2 - 3y + y^2 = x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1$

L'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est caractérisée par l'équation $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1 = 0$

(ou encore : $(x+1)^2 - 1 + (y - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - 1 = 0$, soit : $(x+1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{17}{4}$

Cercle de centre $I(-1\,;\,\frac{3}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{17}}{2}$

3) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA} = 2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MA}$ (Car, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$ (propriété du barycentre oeu propriété du parallélogramme selon le point de vue)

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MA} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MI}$ sont orthogonaux.

L'ensemble des points M vérifiant $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA} = 0$ est le cercle de diamètre $[AI]$.

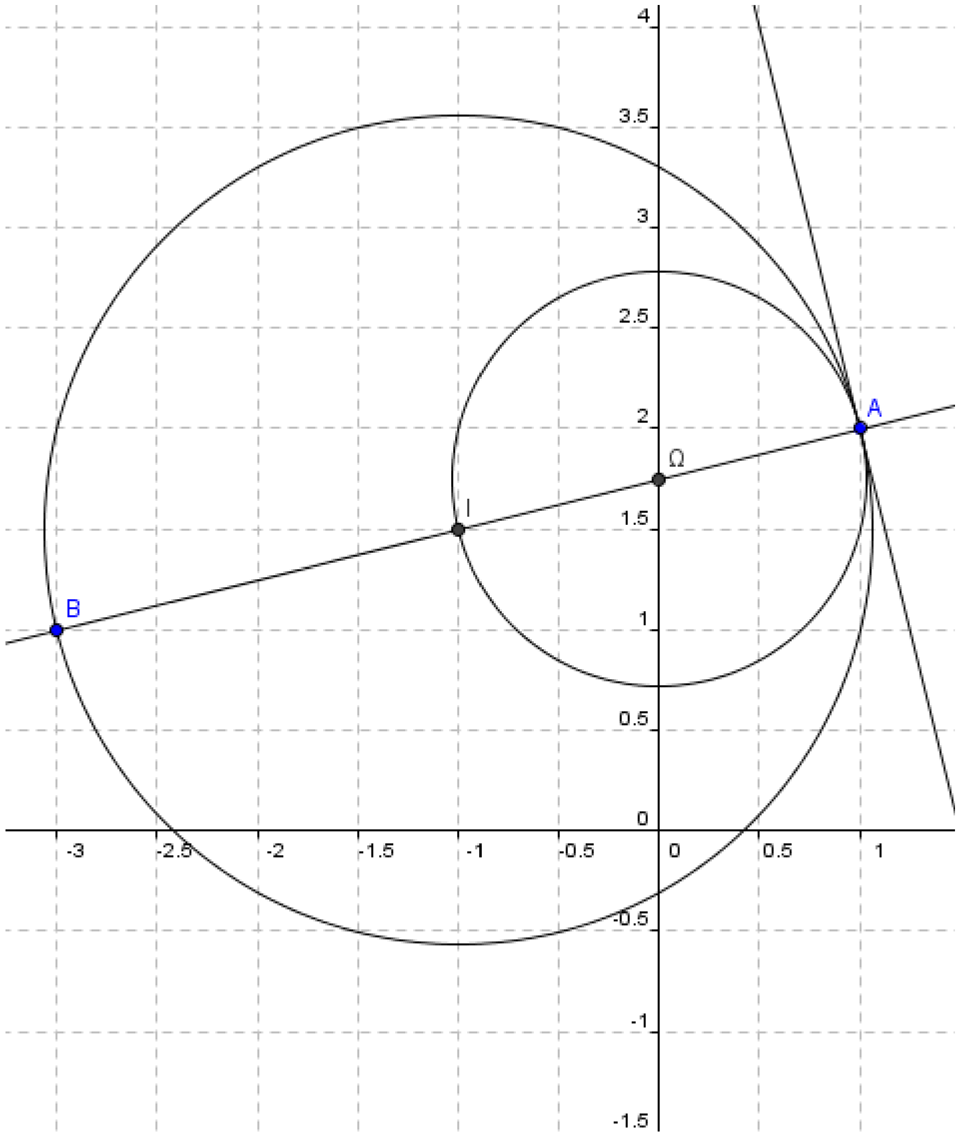
$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}-1-x\\\frac{3}{2}-y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MA} = (1-x)(-1-x) + (2-y)(\frac{3}{2} - y) = -1 + x^2 + 3 - \frac{7}{2}y + y^2 = x^2 + y^2 - \frac{7}{2}y + 2$

L'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA} = 0$ est caractérisée

par l'équation $x^2 + y^2 - \frac{7}{2}y + 2 = 0$ (ou encore : $x^2 + (y - \frac{7}{4})^2 - \frac{49}{16} + 2 = 0$, soit : $(x+1)^2 + (y - \frac{7}{4})^2 = \frac{17}{16}$

Cercle de centre $\boldsymbol{\Omega}(0\,;\,\frac{7}{4})$ et de rayon $\frac{\sqrt{17}}{4}$,



21 page 335

Dans un repère orthonormal, $A(1\ ;\ –1)$, $B(–4\ ;\ –3)$ et $C(2\ ;\ 5)$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (en effet : $–5\times6 \neq –2\times1$)

Les points A, B et C ne sont pas alignés.

2a) Hauteur du triangle ABC issue de A :

On cherche une équation de la droite Δ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}$

$M(x\ ;\ y) \in \Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ si et seulement si $6(x – 1) + 8(y + 1) = 0$

Une équation de Δ est : $3x + 4y + 1 = 0$

b) Une méthode :

Soit H le pied de la hauteur issue de A.

H est le point d'intersection de (BC) et de Δ.

$H \in (BC)$ si et seulement si $\overrightarrow{BH} = t\ \overrightarrow{BC}$ où $t \in \mathbb{R}$.

On a donc : $\begin{cases} x_H - x_B = t \times 6 \\ y_H - y_B = t \times 8 \end{cases}$, soit : $x_H = -4 + 6t$ et $y_H = -3 + 8t$.

Dans l'équation de Δ, il vient : $3(-4 + 6t) + 4(-3 + 8t) + 1 =$, d'où, $t = \dfrac{23}{50}$

$x_H = -4 + 6\times \dfrac{23}{50} = -\dfrac{62}{50} = -1{,}24$ et $y_H = -3 + 8\times\dfrac{23}{50} = \dfrac{34}{50} = 0{,}68$

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \dfrac{-62}{50}-1 \\ \dfrac{34}{50}+1 \end{pmatrix}$, soit, $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \dfrac{-112}{50} \\ \dfrac{84}{50} \end{pmatrix}$ et $AH^2 = \dfrac{(-112)^2+84^2}{50^2} = \dfrac{140^2}{50^2}$, $AH = \dfrac{14}{5} = 2{,}8$

Autre méthode :

AH est la distance du point A à la droite (BC).

On cherche alors une équation de (BC) :

$M(x\ ;\ y) \in (BC)$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ colinéaires.

La relation de colinéarité de deux vecteurs mène à : $8(x + 4) - 6(y + 3) = 0$, soit : $8x - 6y + 14 = 0$

Une équation de (BC) est : $4x - 3y + 7 = 0$

La distance de A à (BC) est donnée par $d = \dfrac{|4\times 1 - 3\times(-1) + 7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{14}{5} = 2{,}8$

3/ Les données précédentes permettent de connaître les trois longueurs des côtés :

$BC = \sqrt{6^2+8^2} = 10$, $AC = \sqrt{1^2+6^2} = \sqrt{37}$ et $BA = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$

Aire du triangle ABC,

$\mathcal{A} = \dfrac{BC\times AH}{2} = \dfrac{10\times 2{,}8}{2} = 14$

4/ Hauteur issue de B de longueur h_1 est telle que $\mathcal{A} = \dfrac{AC\times h_1}{2}$, d'où, $h_1 = \dfrac{28}{\sqrt{37}}$

Hauteur issue de C de longueur h_2 est telle que $\mathcal{A} = \dfrac{BA\times h_2}{2}$, d'où, $h_2 = \dfrac{28}{\sqrt{29}}$

Exercice A page 344 (Asie juin 2003)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$A(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$; $B(6\ ;\ 1\ ;\ 5)$; $C(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$

Partie I

donc $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ et $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$

1) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 3 + 3\times 0 + 3\times(-3) = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, d'où ABC est un triangle rectangle en A

2) $\mathcal{P}$ plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$

Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AB} = 3\ \vec{n}$, la droite ($AB$) est orthogonale à $\mathscr{P}$.
D'autre part, les coordonnées de A vérifient l'équation de $\mathscr{P}$.
$\mathscr{P}$ est donc orthogonal à (AB) et passe par A.

3) $\mathscr{P}' \perp (AC)$ et passant par A.
$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{P}'$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ si et seulement si $3(x-3) + 0(y-2) - 3(z-2) = 0$,

Une équation de (P') est $x - z - 1 = 0$

4) Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \Delta$ intersection de (P) et (P') si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-z-1=0\end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases}x=t\\y=-2t+4\\z=-1+t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

Remarquer: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$, un vecteur directeur de Δ, est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

Lorsque $t=3$, on obtient les coordonnées de A

Partie II

1) $D(0\ ;\ 4\ ;\ -1)$.

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$, Comme $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = ... = 0$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = ... = 0$, la droite ($AD$) est orthogonale au plan (ABC)

2) Volume de $ABCD$ est $V = \frac{1}{3}\ Aire(ABC)\times AD$ puisque AD est la longueur de la hauteur relative à la base ABC.

ABC rectangle en A, d'où : Aire (ABC) = $\frac{AB\times AC}{2} = \frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

$AD = ... = 3\sqrt{6}$
$V = ... = 27$

3) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = DB \times DC \cos \widehat{BDC}$, et $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = 6\times6 + (-3)\times(-6) + 6\times0 = 54$,

$DB = ... = 9$ et $DC = ... = 6\sqrt{2}$ $\qquad$ $\cos \widehat{BDC} = ... = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc, $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}$

4) a) Aire (BDC)= $\dfrac{DC\times BD\sin\frac{\pi}{4}}{2} = \ldots = 27$

b) $V = \frac{1}{3}\text{Aire}(BDC)\times h$, d'où, $h=3$

Exercice B page 378 **(Bac Antilles juin 2004)**

$ABCD$ est un tétraèdre; I est le milieu de [AB] et J celui de [CD]
1 a) G_1 barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, -1), (D, 1)\}$est barycentre de $\{(I, 2), (C, -1), (D, 1)\}$ d'après le théorème d'associativité.

On a: $2\ \overrightarrow{G_1 I} - \overrightarrow{G_1 C} + \overrightarrow{G_1 D} = \vec{0}$, et, d'après la relation de Chasles:$- \overrightarrow{G_1 C} + \overrightarrow{G_1 D} = \overrightarrow{CD}$, d 'où, $\overrightarrow{IG_1} = \dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{CD}$

b) G_2 barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (D, 2)\}$est barycentre de $\{(I, 2), (D, 2)\}$ d'après le théorème d'associativité.
G_2 est donc le milieu de $[ID]$
c) Comme J est le milieu de $[DC]$, on a: $\overrightarrow{JD} = \dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{CD}$
D'après 1a), , $\overrightarrow{IG_1} = \overrightarrow{JD}$, le quadrilatère IG_1DJ est donc un parallélogramme.
G_2 étant le milieu de la diagonale$[ID]$, est celui de $[G_1J]$

2) m est un réel. G_m barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, m-2), (D, m)\}$
a) G_m existe si et seulement si $1 + 1 + m - 2 + m \neq 0$, soit, $m \neq 0$
$E = \mathbb{R}^*$
b) $m \neq 0$,
G_m barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, m-2), (D, m)\}$ est barycentre de $\{(I\,; 2), (C, m-2), (D, m)\}$ d'après le théorème d'associativité.

On a: $2\ \overrightarrow{G_m I} + (m-2)\ \overrightarrow{G_m C} + m\ \overrightarrow{G_m D} = \vec{0}$,
On en déduit: $(2 + m - 2 + m)\ \overrightarrow{IG_m} = (m-2)\ \overrightarrow{IC} + m\ \overrightarrow{ID}$
Soit: $2m\ \overrightarrow{IG_m} = (m-2)\ \overrightarrow{IC} + m\ \overrightarrow{ID}$ ce qui prouve que G_m est un point du plan (ICD)

c) G_m barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, m-2), (D, m)\}$, d'où,
$(1 + 1 + m - 2 + m)\ \overrightarrow{JG_m} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + (m-2)\ \overrightarrow{JC} + m\ \overrightarrow{JD}$
Or, J milieu de $[CD]$, donc, $m\ \overrightarrow{JC} + m\ \overrightarrow{JD} = \vec{0}$
Finalement: $2m\ \overrightarrow{JG_m} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} - 2\ \overrightarrow{JC} = 2\ \overrightarrow{JI} - 2\ \overrightarrow{JC} = 2\ \overrightarrow{CI}$
ce qui prouve que $m\,\overrightarrow{JG_m}$ est le vecteur constant $\overrightarrow{CI}$

d) D'après c) $\overrightarrow{JG_m}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires.
Comme m décrit $\mathbb{R}^*$, G_m est sur la parallèle Δ à (IC) passant par J
Réciproquement: Tout point M de Δ peut-il être barycentre du système donné au 2.
Soit M un point de Δ.
Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{JM} = k\ \overrightarrow{CI}$
L'égalité $m\ \overrightarrow{JM} = k\ \overrightarrow{CI}$ est vraie pour $m = k$ et donc pour $k \neq 0$.
On a alors : $M \neq J$.
G_m décrit Δ privée de J.