Index

32 page 188

Dans la suite de l'exercice C est un réel.
Les primitives existent **sur les intervalles où la fonction est continue.**

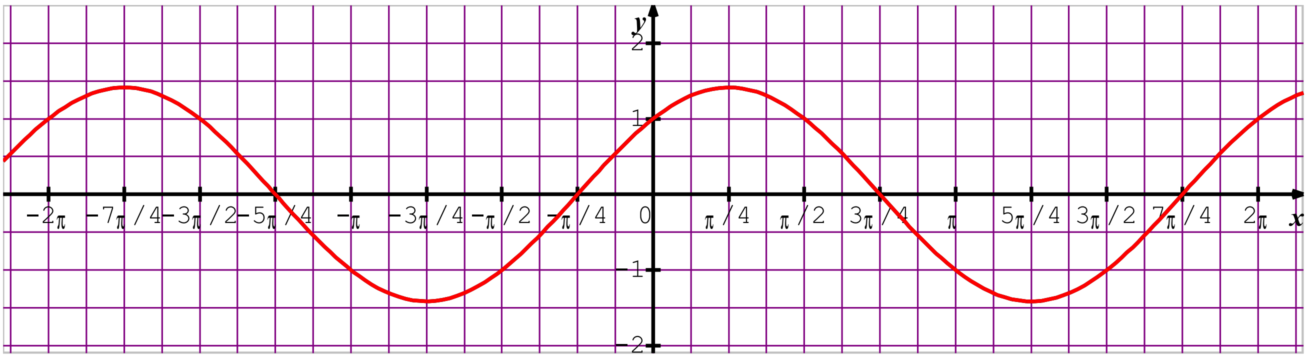
Cas où $f = \dfrac{u'}{u}$, une primitive $F = \ln \circ\ |u|$ (En pratique, il est nécessaire de déterminer les intervalles où u garde un signe constant sans s'annuler)

F) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$ $u(x) = \cos x + \sin x$, $u'(x) = -\sin x + \cos x$, d'où, $f = -\dfrac{u'}{u}$ et

$F(x) = -\ln|\cos x + \sin x| + C$

Comme $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, les intervalles où $u > 0$ sont $\left]-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[$; $k \in \mathbb{Z}$

les intervalles où $u < 0$ sont $\left]\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi\right[$; $k \in \mathbb{Z}$



G) $f(x) = \tan(2x-1) = \dfrac{\sin(2x-1)}{\cos(2x-1)}$ $u(x) = \cos(2x-1)$, $u'(x) = -2\sin(2x-1)$, d'où, $f = -\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ et

$F(x) = -\dfrac{1}{2}\ln|\cos(2x-1)| + C$

Les intervalles où $u > 0$ sont définis par $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi < 2x - 1 < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$x \in \left]\dfrac{-\pi+2}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi+2}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right[$; $k \in \mathbb{Z}$

Les intervalles où $u < 0$ sont définis par $\dfrac{\pi}{2} + k\pi < 2x - 1 < \dfrac{3\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$x \in \left]\dfrac{\pi+2}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi+2}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right[$; $k \in \mathbb{Z}$

I) $f(x) = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$ d'où, $f = \dfrac{u'}{u}$ et $F(x) = \ln|\sin x| + C$

Les intervalles où $u > 0$ sont $]\,2k\pi\ ;\ \pi + 2k\pi\,[$; $k \in \mathbb{Z}$.
Les intervalles où $u < 0$ sont $]\,\pi + 2k\pi\ ;\ 2\pi + 2k\pi\,[$; $k \in \mathbb{Z}$.

P) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$ $u(x) = 1 - x^2$ $u'(x) = -2x$ d'où $f = -\dfrac{u'}{u}$ et $F(x) = -\ln|1 - x^2| + C$

$u > 0$ sur $]-1\ ;\ 1[$ et $u < 0$ sur $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$

T) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$ $u(x) = 1 - e^x$ $u'(x) = -e^x$ d'où $f = -\dfrac{u'}{u}$ et $F(x) = -\ln|1 - e^x| + C$

$= \ln\left|\dfrac{1}{1-e^x}\right| + C.$

$u > 0$ sur $]-\infty\,;0[$ et $u < 0$ sur $]0\,;+\infty[$

Cas où $f = u'\,u^n$ une primitive est $F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$ avec $n \neq -1$

A) $f(x) = \sin x \cos^4 x$ $u(x) = \cos x$, $u'(x) = -\sin x$, d'où, $f = -u'\,u^4$ et $F(x) = -\dfrac{1}{5}\cos^5 x + C.$ (sur $\mathbb{R}$)

B) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ définie et continue sur $]0\,;+\infty[$

$u(x) = \ln x$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ d'où, $f = -u'\,u$ et $F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

E) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x+5}} = (4x+5)^{-\frac{1}{2}}$ définie et continue sur $]-\dfrac{5}{4}\,;+\infty[$

$u(x) = 4x + 5$, $u'(x) = 4$ d'où, $f = \dfrac{1}{4}u'\,u^{-1/2}$ et $F(x) = \dfrac{1}{4}\times 2\times(4x+5)^{1/2} + C = \dfrac{1}{2}\sqrt{4x+5} + C.$

M) $f(x) = 4\sin(3x)\cos(3x)$ $u(x) = \sin(3x)$, $u'(x) = 3\cos(3x)$, d'où, $f = \dfrac{4}{3}u'u$ et

$F(x) = \dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{2}\sin^2(3x) + C = \dfrac{4}{6}\sin^2(3x) + C$

N) $f(x) = \cos x\times\sin^2 x$ $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$ d'où, $f = u'\,u^2$ et $F(x) = \dfrac{1}{3}\sin^3 x + C.$

R) $f(x) = (x^2 - 4)\sqrt{x^3 - 12x} = (x^3 - 12x)^{1/2}$ définie et continue sur $[-2\sqrt{3}\,;0]$ et sur $[2\sqrt{3}\,;+\infty[$

$u(x) = x^3 - 12x$, $u'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$, d'où, $f = \dfrac{1}{3}u'u^{1/2}$

et $F(x) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times(x^3 - 12x)^{2/3} + C = \dfrac{2}{9}(x^3 - 12x)\sqrt{x^3 - 12x} + C.$

U) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} = x(x^2 + 4)^{-1/2}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$. $u(x) = x^2 + 4$, $u'(x) = 2x$, d'où, $f = \dfrac{1}{2}u'\,u^{-1/2}$

et $F(x) = \dfrac{1}{2}\times 2\times(x^2 + 4)^{1/2} + C = \sqrt{x^2+4} + C$

Cas où $f = u'\,e^u$ une primitive est $F = e^u$

C) $f(x) = e^{-2x+6}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$u(x) = -2x + 6$, $u'(x) = -2$, d'où, $f = -\dfrac{1}{2}u'\,e^u$ et $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x+6} + C$.

K) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ définie et continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$

$u(x) = \dfrac{1}{x}$, $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, d'où, $f = -u'\,e^u$ et $F(x) = -e^{\frac{1}{x}} + C.$

L) $f(x) = 2x\,e^{x^2}$ $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, d'où $f = u'\,e^u$ et $F(x) = e^{x^2} + C.$

Par intégration par parties sur un intervalle où u, v sont dérivables et u' , v' continues.
a et x étant des réels sur le "bon" intervalle, on sait:

la primitive qui s'annule en a de *f* est $F:\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Si $f = uv'$, on a alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$

D) $f(x)=x^2\cos x$ (deux intégrations par parties)

$\begin{cases} u(t)=t^2 \\ v'(t)=\cos t \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(t)=2t \\ v(t)=\sin t \end{cases}$, $f(x) = [t^2\times\sin t]_0^x - \int_0^x 2t\times\sin t\,\mathrm{d}t = x^2.\sin x - 2\int_0^x t\times\sin t\,\mathrm{d}t$

Calcul de $\int_0^x t\times\sin t\,\mathrm{d}t$ par Ipp

$\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=\sin t \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=-\cos t \end{cases}$

$\int_0^x t\times\sin t\,\mathrm{d}t = [t(-\cos t)]_0^x - \int_0^x (-\cos t)\,\mathrm{d}t = -x\cos x + \int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t$

calcul de $\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^x = \sin x$

Finalement:

la primitive de *f* qui s'annule en 0 est: $F(\mathrm{x}) = x^2.\sin x - 2(-x\cos x + \sin x) = x^2.\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

H) $f(x)=(x+1)\cdot\sin 3x$ On pose: $u(x) = x + 1$ et $v'(x) = \sin 3x$

$F(x)=(x+1)\times\frac{1}{3}(-\cos 3x)+\frac{1}{9}\sin 3x+C=\frac{\sin 3\cdot x}{9}-\frac{(x+1)\cdot\cos 3x}{3}+C$

Après transformation d'écriture

J) $f(x)=\frac{2x-1}{4x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{x}$ $F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln|x|+C$

Q) sur tout intervalle ne contenant pas -1, on a: $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}$ d'où, $f(x)=\ln|x-1|+C$

S) $f(x) = \cos^2 x$

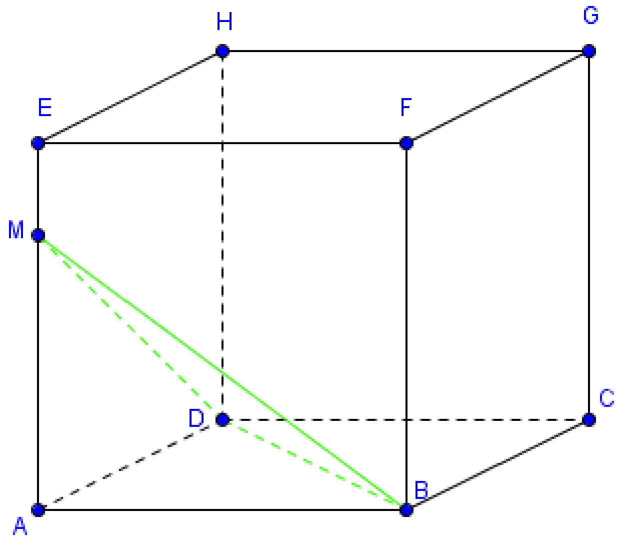
On sait: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

On en déduit: $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

d'où, $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin(2x) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$.

Exercice B page 344

On considère un cube *ABCDEFGH* d'arête 1.



Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite $[AE)$ défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

(Voir une méthode en choisissant un repère orthonormal à la fin de l'exercice)

1- Déterminer le volume du tétraèdre $ABDM$ en fonction de a.

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}\times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur du tétraèdre.

Ici: $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{BA\times BD}{2} \times AM = \frac{1}{6a}$

2. Soit K le barycentre du système de points pondérés : $\{(M;\, a^2), (B;\, 1), (D;\, 1)\}$.

a. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et de $\overrightarrow{BD}$.

$a^2\,\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$ équivaut à

$a^2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}) + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BK} = \vec{0}$ équivaut à

$(a^2+2)\,\overrightarrow{BK} = a^2\,\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}$

Puisque $a^2 + 2 \neq 0$, on a : $\overrightarrow{BK} = \frac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD}$.

On en déduit que K est un point du plan (BDM) puisque $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont deux vecteurs directeurs de ce plan.

Comme $0 < \frac{a^2}{a^2+2} < 1$ et $0 < \frac{1}{a^2+2} < 1$ alors K est à l'intérieur du triangle BDM.

b. Calculer $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}$.

D'après 2a/, $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM}\,.\,\overrightarrow{AM} + \frac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD}\,.\,\overrightarrow{AM}$

Or, $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}).\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}^2 = 0 + \frac{1}{a^2}$

et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ **(La droite (AM) étant orthogonale au plan (ABD) est orthogonale à toute droite du plan, d'où, (AM) est orthogonale à (BD))**

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2+2}\times\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2+2}$

D'après 2a/, $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2}{a^2+2}\ \overrightarrow{BM}\ .\ \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{a^2+2}\ \overrightarrow{BD}\ .\ \overrightarrow{AD}$

Or, $\overrightarrow{BM}\ .\ \overrightarrow{AD} = 0$ **(La droite (AD) étant orthogonale au plan (ABE) est orthogonale à toute droite du plan, d'où, (AD) est orthogonale à (BM))**

et $\overrightarrow{BD}\ .\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}^2 = 1$

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{a^2+2}$

On a alors : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}$

Comme $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BK}\ (\ \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}\ ) = \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 - 1 = -1$

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DB} = 2$

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{DB} &= \frac{a^2}{a^2+2}\ \overrightarrow{BM}\ .\ \overrightarrow{DB} + \frac{1}{a^2+2}\ \overrightarrow{BD}\ .\ \overrightarrow{DB}\\ &= \frac{a^2}{a^2+2}\ (\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\ )\ \overrightarrow{DB} - \frac{1}{a^2+2}\times 2\\ &= \frac{a^2}{a^2+2}\ (\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DB}\ ) - \frac{1}{a^2+2}\times 2 = -\frac{a^2}{a^2+2} - \frac{1}{a^2+2}\times 2 = -1\end{aligned}$$

Finalement :

$\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB} = -1 + 2 + 0 - 1 = 0$

d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$, donc, la droite (BK) est perpendiculaire à (MD).

Par conséquent : (BK) est une hauteur du triangle BDM.

De même, $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ implique :

(DK) est une hauteur du triangle BDM.

K étant le point d'intersection de deux hauteurs du triangle BDM est l'orthocentre de ce triangle.

3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$

Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MB} = (\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}\ )\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MB} + 0 = \overrightarrow{AD}\ .(\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\ ) = 0 + 0 = 0$

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MD} = (\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}\ )\ \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MD} + 0 = \overrightarrow{AB}\ .(\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\ ) = 0 + 0 = 0$

La droite (AK) étant orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDM) est orthogonale à ce plan.

Comme $K \in (AMD)$, AK est la hauteur du tétraèdre $AMBD$.

4. a. Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

Dans le triangle BAM rectangle en A, on a : $BM^2 = BA^2 + AM^2 = 1 + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2+1}{a^2}$

Dans le triangle DAM rectangle en A, on a : $DM^2 = DA^2 + AM^2 = 1 + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2+1}{a^2}$

On obtient : $BM = DM$

(Ne pas hésiter à dessiner un triangle isocèle ...)
Soit I le milieu de $[DB]$.
Le triangle BDM étant isocèle en M, la médiane $[MI]$ est aussi une hauteur de ce triangle.

$MI^2 = BM^2 - \frac{1}{4}BD^2 = 1 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4}\times 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^2+2}{2a^2}$

Aire de BDM est : $\mathcal{A} = \frac{MI\times BD}{2} = \frac{\sqrt{a^2+2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}a\times 2} = \frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$

b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.

On résout : $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a} = 1$ qui équivaut à $\sqrt{a^2+2} = 2a$.

Comme $a > 0$, cette équation est équivalente à : $a^2 + 2 = 4a^2$

On en déduit : $a^2 = \frac{2}{3}$, puis $a = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Comme AK est la hauteur relative à la base BDM du tétraèdre $ABDM$ de volume $\mathcal{V} = \frac{1}{6a}$ (Voir 1/)

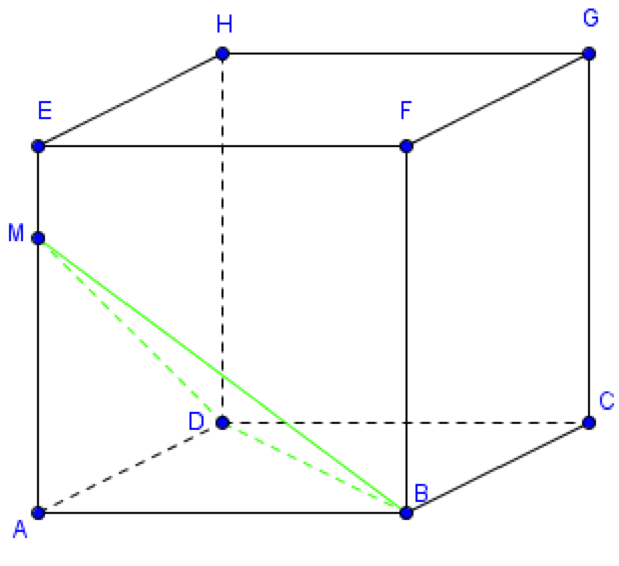
On a : $\frac{1}{6a} = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}\times AK$.

$AK = \frac{1}{2a}\times\frac{2a}{\sqrt{a^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+2}}$

Comme $a^2 = \frac{2}{3}$, on obtient : $AK = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Avec un repère orthonormal

On choisit par exemple $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$



On a donc : $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,1)$, d'où $M(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{a})$

K étant le barycentre de

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{0\times a^2+1\times 1+0\times 1}{a^2+1+1} \\ y_K = \dfrac{0\times a^2+0\times 1+1\times 1}{a^2+1+1} \\ z_K = \dfrac{\frac{1}{a}\times a^2+0\times 1+0\times 1}{a^2+1+1} \end{cases}, \text{ soit, } \begin{cases} x_K = \dfrac{1}{a^2+2} \\ y_K = \dfrac{1}{a^2+2} \\ z_K = \dfrac{a}{a^2+2} \end{cases}$$

On a alors $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2+2}-1 \\ \dfrac{1}{a^2+2} \\ \dfrac{a}{a^2+2} \end{pmatrix}$, soit, $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} \dfrac{-a^2-1}{a^2+2} \\ \dfrac{1}{a^2+2} \\ \dfrac{a}{a^2+2} \end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$, on obtient : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM} = 0 + 0 + \dfrac{1}{a} \times \dfrac{a}{a^2+2} = \dfrac{1}{a^2+2}$

et $\overrightarrow{BK} \,.\, \overrightarrow{AD} = 0 + 1\times \dfrac{1}{a^2+2} + 0\times \dfrac{a}{a^2+2} = \dfrac{1}{a^2+2}$

$\overrightarrow{MD} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0 + \dfrac{1}{a^2+2} + \left(-\dfrac{1}{a}\right) \times \dfrac{a}{a^2+2} = 0$

On a aussi $\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2+2} \\ \dfrac{1}{a^2+2} \\ \dfrac{a}{a^2+2} \end{pmatrix}$, d'où,

$$AK^2 = \left(\frac{1}{a^2+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{a^2+2}\right)^2 + \left(\frac{a}{a^2+2}\right)^2 = \frac{1}{(a^2+2)^2}(2+a^2) = \frac{1}{a^2+2}$$