

EXERCICE 1**6 points****Commun à tous les candidats****Partie A : Restitution organisée de connaissances**

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur \mathbb{R} par $g(x) = Ke^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = -\frac{b}{a}$ est une solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\iff f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t , où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde. On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30 \left(1 - e^{-\frac{t}{10}} \right)$.
2.
 - a. Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - b. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à $0,1 \text{ m.s}^{-2}$. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.
4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1 , et t_2 est donnée par $d = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

EXERCICE 2**4 points****Commun à tous les candidats**

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté.

Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V, sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :

- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas et il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.
Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.
2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.
3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?
4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.

L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$.

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

EXERCICE 3**5 points**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

Partie ASoit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1).$$

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
En déduire que si $x \in [0 ; 1]$ alors $f(x) \in [0 ; 1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \in [0 ; 1]$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

Pour la partie B, vous avez besoin d'une des propriétés suivantes :

- 1) Une suite décroissante et minorée est convergente.
- 2) Une suite croissante et majorée est convergente.

Pour déterminer la limite, n'hésitez pas à faire une représentation graphique et faites le lien avec la question 1/ de la partie A.

EXERCICE 4**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-2; 0; 1)$, $B(1; 2; -1)$ et $C(-2; 2; 2)$.

1.
 - a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
 - b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle \widehat{BAC} .
 - c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.
3. Soient \mathcal{P}_1 , et \mathcal{P}_2 les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

Montrer que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants selon une droite \mathcal{D} dont un sys-

tème d'équations paramétriques est
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. Démontrer que la droite \mathcal{D} et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Soit \mathcal{S} la sphère de centre $\Omega(1; -3; 1)$ et de rayon $r = 3$.
 - a. Donner une équation cartésienne de la sphère \mathcal{S} .

Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

- b. Étudier l'intersection de la sphère \mathcal{S} et de la droite \mathcal{D} .
- c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère \mathcal{S} .