Index

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie\ mars 2011

EXERCICE 1 *6 points* *Commun à tous les candidats*

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = Ke^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) :
$y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. *Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).*

Méthode : on remplace y et y' par $u(x)$ et $u'(x)$ dans l'équation et on montre qu'il y a égalité.

Application : On a : $u'(x) = 0$, l'égalité $0 = a\left(-\dfrac{b}{a}\right) + b$ est vérifiée.

2. *Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante :*
f est solution de (E) $\Leftrightarrow f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Méthode : Il s'agit de démontrer une équivalence.
Soit on peut traiter l'équivalence en une seule fois (écrire un système pour amener par équivalences un autre système), on doit s'assurer à chaque fois que les informations d'un système permettent de retrouver les informations de l'autre système dans les deux sens.
soit on démontre deux implications.

Analyse de l'équivalence :

$$\begin{cases} f \text{ solution de (E)} \\ (E): y' = ay + b \\ u \text{ solution de (E)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f - u \text{ solution de } y' = ay \\ u \text{ solution de (E)} \end{cases}$$

Démonstration :

$$\begin{cases} f \text{ solution de (E)} \\ (E): y' = ay + b \\ u \text{ solution de (E)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = af + b \\ u' = au + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = au + b \\ f' - u' = af - au \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = au + b \\ (f - u)' = a(f - u) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f - u \text{ solution de } y' = ay \\ u \text{ solution de (E)} \end{cases}$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Analyse de ce qui précède :
D'après le 2/ on sait que, connaissant les fonctions solutions g de l'équation $y = ay$ et connaissant une solution particulière u de (E), on obtient les fonctions f solutions de (E), et, la relation entre ces fonctions est : $g = f - u$.
Au 1/, on a obtenu une solution particulière de (E).
Dans l'énoncé, on nous rappelle les solutions de $y' = ay$.

Application :

Puisque la fonction u définie par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution particulière de (E) et puisque les fonctions g

définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = Ke^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$ sont solutions de $y' = ay$, on obtient :
les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(x) + u(x)$ sont solutions de (E).
Conclusion : $f : x \mapsto Ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où $K \in \mathbb{R}$ sont les solutions de (E).

Partie B
Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note v(t)sa vitesse à l'instant t , où t est exprimé en secondes et v(t) en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle [0 ; +∞[.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :
10v'(t)+v(t)= 30.
Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que v(0) = 0.

1. *Démontrer que* $v(t) = 30\left(1-e^{-\frac{t}{10}}\right)$.
L'équation $10v'(t) + v(t) = 30$ s'écrit aussi $v'(t) = -\dfrac{1}{10}v(t) + 3$
D'après la partie A/, les solutions sont les fonctions $v : t \mapsto K e^{-\frac{1}{10}t} - 3\times(-10)$ où $K \in \mathbb{R}$.
Comme $v(0) = 0$, on a : $K + 30 = 0$, soit, $K = -30$.
La solution vérifiant la condition initiale est donc la fonction $v : t \mapsto -30e^{-\frac{1}{10}t} + 30 = 30\left(1-e^{-\frac{t}{10}}\right)$

2. a. *Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle [0 ; +∞[.*
v est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction v' définie par $v'(t) = -30\times(-\dfrac{1}{10})\times e^{-\frac{1}{10}t} = 3e^{-\frac{1}{10}t}$
qui est strictement positive, puisque l'image d'un réel par une exponentielle est strictement positive.
Conclusion : La fonction v est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
b. *Déterminer la limite de la fonction v en +∞.*
On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{1}{10}t = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, d'où, par limite de fonctions composées : $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{10}t} = 0$
Par limites de produit, puis somme , il vient : $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 30$

3. *On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération v'(t) est inférieure à* $0{,}1 m.s^{-2}$*.Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.*
On résout sur $[0 ; +\infty[$, l'inéquation $v'(t) < 0{,}1$
Soit : $3e^{-\frac{1}{10}t} < 0{,}1$ qui équivaut à $e^{-\frac{1}{10}t} < \dfrac{1}{30}$
On applique la fonction ln qui est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$
$v'(t) < 0{,}1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{10}t < \ln\dfrac{1}{30}$ ou encore $-\dfrac{1}{10}t < -\ln 30$
On multiplie par -10 qui est négatif ...
$v'(t) < 0{,}1 \Leftrightarrow t > 10\times\ln 30$
La calculatrice donne une valeur comprise strictement entre 34 et 35.
Conclusion : la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée est à la seconde près égale à 35 sec.

4. *La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants* t_1 *et* t_2 *est donnée par* $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.
Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

On demande donc de calculer $d = \int_0^{35} v(t)\,\mathrm{d}t$

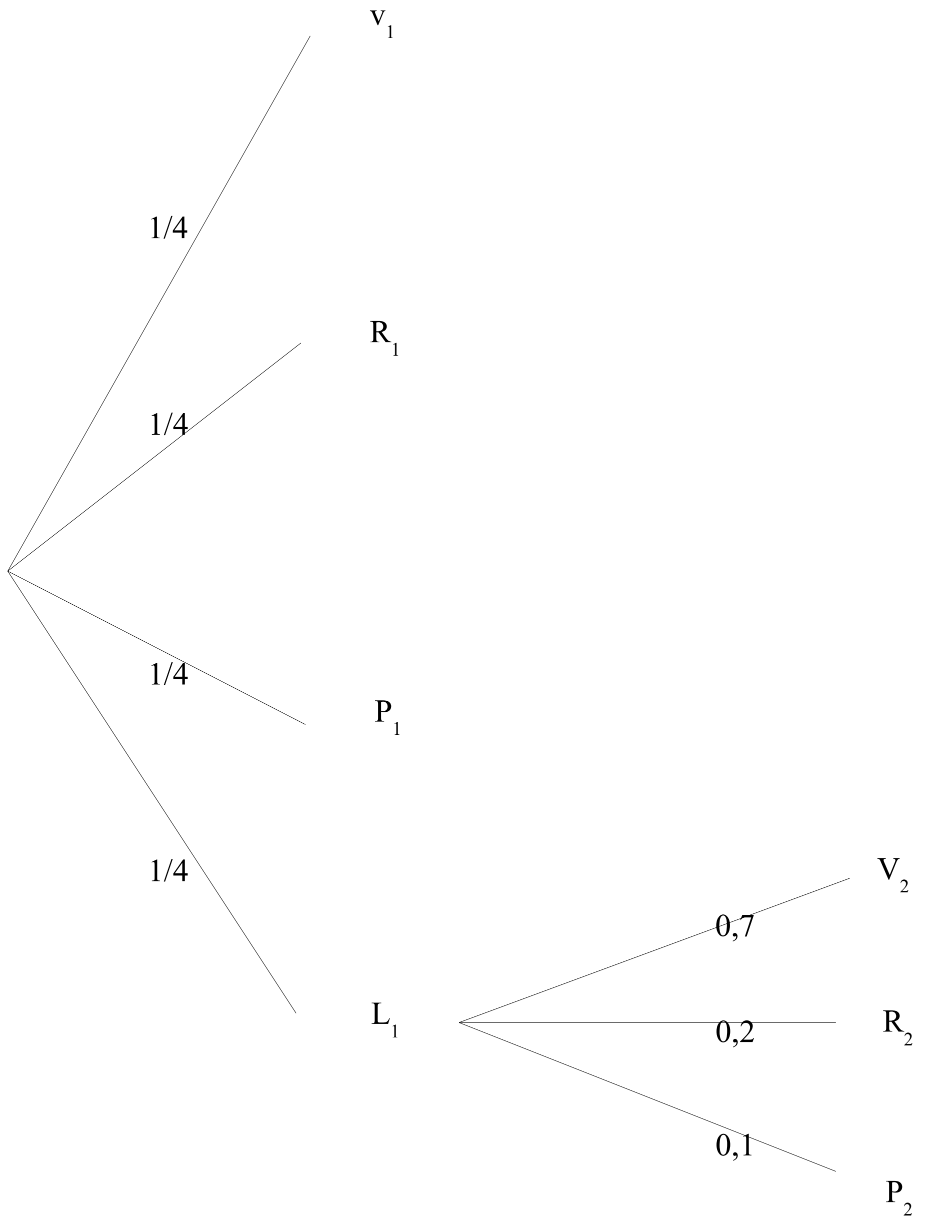
Une primitive de $v : t \mapsto -30\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} + 30$ est $V : t \mapsto -30\times(-10)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} + 30t = 300\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} + 30t$

$d = V(35) - V(0) = 300\times\mathrm{e}^{-3,5} + 30\times35 - 300\ \ 300\times\mathrm{e}^{-3,5} + 30\times25 = \ 300\times\mathrm{e}^{-3,5} + 750$

Une valeur approchée est environ 759,1 mètre

EXERCICE 2 ***4 points*** ***Commun à tous les candidats***

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté.
Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.
Un concurrent tire au hasard un jeton :– s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,
– s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,
– s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,
– s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.
On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70% des cas, il choisit le roller dans 20% des cas et il décide de faire le parcours à pied dans 10% des cas.
1. *Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.*
L'indice 1 ou 2 indique le numéro du tirage
Cette indexation n'est pas nécessaire si les idées sont claires ... mais, certains d'entre vous n'ont pas réussi à distinguer les deux cas disjoints pour résoudre les questions 2/ ou 3/



Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.

***2**. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.*

Le trajet est effectué en vélo (événement V) lorsqu'au premier tirage , le jeton est marqué V et lorsqu'au premier tirage le jeton est marqué L **et** qu'au second tirage, le jeton est marqué V.

On donc : $V = V_1 \cup (L_1 \cap V_2)$ avec $V_1 \cap (L_1 \cap V_2) = \varnothing$

$P(V) = P(V_1) + P(L_1 \cap V_2)$ avec $P(L_1 \cap V_2) = P(L_1) \times P_{L1}(V_2)$

$P(V) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \times 0{,}7 = 0{,}25 \times 1{,}7 = 0{,}425$

***3.** Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?*

On cherche : $P_V(L) = \dfrac{P(V \cap L)}{P(L)} = \dfrac{0{,}25 \times 0{,}7}{0{,}425} = \dfrac{0{,}7}{1{,}7} \approx 0{,}412$

***4.** On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.*

L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir

effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$ *. Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».*
Remarque : *On considère un nouvel événement : le concurrent a effectué le trajet à vélo* ***ET*** *il a gagné l'épreuve*
L'événement contraire de " l'épreuve est remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste » " est " l'épreuve n'est jamais remportée par un concurrent « non cycliste » " ou encore " L'épreuve est remportée par un cycliste "
On sait : P(" Cycliste gagne ") = $\frac{2}{3}$.
Les événements étant indépendants, la probabilité qu'en six épreuves, " l'épreuve n'est jamais remportée par un concurrent « non cycliste » " est donc : $\left(\frac{2}{3}\right)^6$.
et la probabilité qu'en six épreuves, " l'épreuve est remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste » " vaut $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0{,}912$ à un millième près par défaut.
Remarque : Quand on aura étudié la loi binomiale, on pourra appliquer directement une " formule " du cours.

EXERCICE 3 ***5 points*** ***Commun à tous les candidats***

Soit (un) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{cases}$ *pour tout entier naturel n.*

Partie A
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par f (x) = x −ln(x² +1).*
1. *Résoudre dans R l'équation f (x) = x.*
$f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2+1) = x \Leftrightarrow \ln(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x^2+1 = 1$ (la fonction ln est bijective sur $]0 ; +\infty[$ et ln 1 = 0)
L' équation $f(x) = x$ a pour unique solution le réel 0.
Commentaires : Ce résultat montre que la courbe de f et la droite d'équation $y = x$ dans un repère ont un et un seul point commun (Ici : le point O)
Ce résultat sera aussi utile au B3/.
2. *Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1].*
En déduire que si x ∈ [0 ; 1] alors f (x) ∈ [0 ; 1].
f est la somme de fonctions définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$, et, pour tout x réel, on a : $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$
Soit $f'(x) = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$
Il est immédiat que $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(1) = 0$), d'où, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln 2$, on obtient :
$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R} \end{cases}$ implique $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$
Comme $f(1) < 1$, on a montré : si $x \in [0 ; 1]$ alors $f(x) \in [0 ; 1]$
Commentaire : Ce résultat va permettre de montrer que tous les termes u_n sont compris entre 0 et 1.

Partie B
1. *Démontrer par récurrence que, pour tout entier n ⩾0,* $u_n \in [0 ; 1]$.
Remarquer : $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$

Méthode : Mettre en évidence la proposition à démontrer (ici : *pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.)*
Vérifier que la proposition est vraie au premier rang (ici : 0)
Démontrer la transmission d'un rang quelconque au rang suivant
Conclure grâce à l'axiome de récurrence.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $1 \in [0\ ;\ 1]$
Hérédité : Soit un entier n tel que $u_n \in [0\ ;\ 1]$
D'après la question A/2/, on a : $f(u_n) \in [0\ ;\ 1]$
Or, $f(u_n) = u_{n+1}$, d'où, $u_{n+1} \in [0\ ;\ 1]$
Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
En remarquant que $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$ et $u_n^2 + 1 \geqslant 1$, on a :
$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
Par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.
Or, la suite u_n est minorée par 0, et, comme elle est décroissante, la suite (u_n) est convergente.
Méthode :
On sait que (u_n) est convergente.
u_{n+1} tend aussi vers l.

On cherche aussi la limite de $f(u_n)$ (utilisation de " limite des fonctions composées ") et de la continuité de f.

Application :

Soit l sa limite.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ et
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. On cherche donc, la limite en l de la fonction f.
Comme la fonction f est continue, d'où, $\lim\limits_{x\to l} f(x) = f(l)$
l est donc solution de l'équation $f(x) = x$.
On a vu au A/1, que cette équation avait pour unique solution 0.
Conclusion :
(u_n) converge vers 0

EXERCICE 4 ***5 points*** ***Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

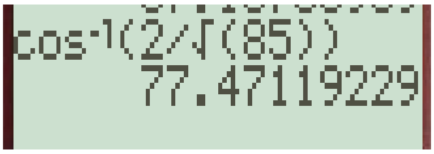
L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et $C(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$.
1. a. *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\2-0\\-1-1\end{pmatrix}, \text{ soit : } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-(-2)\\2-0\\2-1\end{pmatrix}, \text{ soit : } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times0 + 2\times2 + (-2)\times1 = 2$
On sait que $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$
$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{17}$ et $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0^2+2^2+1^2} = \sqrt{5}$

b. *En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.*
Comme dans un plan contenant les points A, B, C, on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$, on en déduit :

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{85}}$$



***c.** En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.*

L'angle $\widehat{BAC}$ n'étant ni nul, ni plat les points A, B, C ne sont pas alignés.

Remarque : il était évident que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étaient pas colinéaires , donc, que les points A, B et C ne sont pas alignés.

***2.** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : 2x − y +2z +2 = 0.*

Méthode : Puisque les points ne sont pas alignés, le plan contenant A, B, C est unique et entièrement défini par ces trois points.

Il suffit donc de vérifier que les coordonnées des points A, B et C sont solutions de l'équation proposée dans l'énoncé.

Application :

Pour $A(-2 ; 0 ; 1)$, on a : $2\times(-2) - 0 + 2\times1 + 2 = 0$, donc, l'équation est vérifiée par les coordonnées de A.

Pour $B(1 ; 2 ; -1)$, on a : $2\times1 - 2 + 2\times(-1) + 2 = 0$, donc, l'équation est vérifiée par les coordonnées de B.

Pour $C(-2 ; 2 ; 2)$, on a : $2\times(-2) - 2 + 2\times2 + 2 = 0$, donc, l'équation est vérifiée par les coordonnées de C.

Une équation cartésienne du plan ABC est bien : $2x - y + 2z + 2 = 0$

Remarque :

Si on ne propose pas d'équation de plan, on sait qu'une équation est de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

On est amené alors à résoudre le système $\begin{cases} -2a+0\times b+c+d=0 \\ a+2b-c+d=0 \\ -2a+2b+2c+d=0 \end{cases}$

Comme nous avons quatre inconnues et trois équations, on cherche à exprimer trois des inconnues en fonction de la quatrième (qui devient alors un paramètre).

***3.** Soient $\mathscr{P}_1$, et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.*

Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants , car, leurs vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

(Évident)

Les coordonnées $(x ; y ; z)$ d'un point M de $\mathscr{D}$ sont solutions du système : $\begin{cases} x+y-3z+3=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases}$

On pose $z = t$, on a alors :

$$\begin{cases} x+y-3z+3=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y+3t-3 \\ -y+3t-3-2y=-6t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y+3t-3 \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

La droite $\mathscr{D}$ est la droite passant par $D(-2 ; -1 ; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

***4.** Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.*

Méthode :
Pour déterminer la **position relative du plan et de la droite**, il suffit d'étudier un vecteur normal de (*ABC*) et un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
Ne pas hésiter à visualiser la situation : deux crayons suffisent, un crayon à la verticale sur la table pour indiquer la direction orthogonale à (*ABC*) et un autre crayon pour indiquer la direction de la droite.
Pour déterminer les coordonnées des points communs à deux " objets géométriques " dont on connaît les équations, on résout le système formé par ces équations.
Application :
Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal du plan (*ABC*) est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$
Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0\times2 + 3\times(-1) + 1\times2 = -1$ est non nul.
Les vecteurs n'étant pas orthogonaux, la droite $\mathscr{D}$ et le plan (*ABC*) ne sont pas parallèles.
Les coordonnées du point d'intersection *I* sont solutions du système $\begin{cases}2x-y+2z+2=0\\x=-2\\y=-1+3t\\z=t\end{cases}$

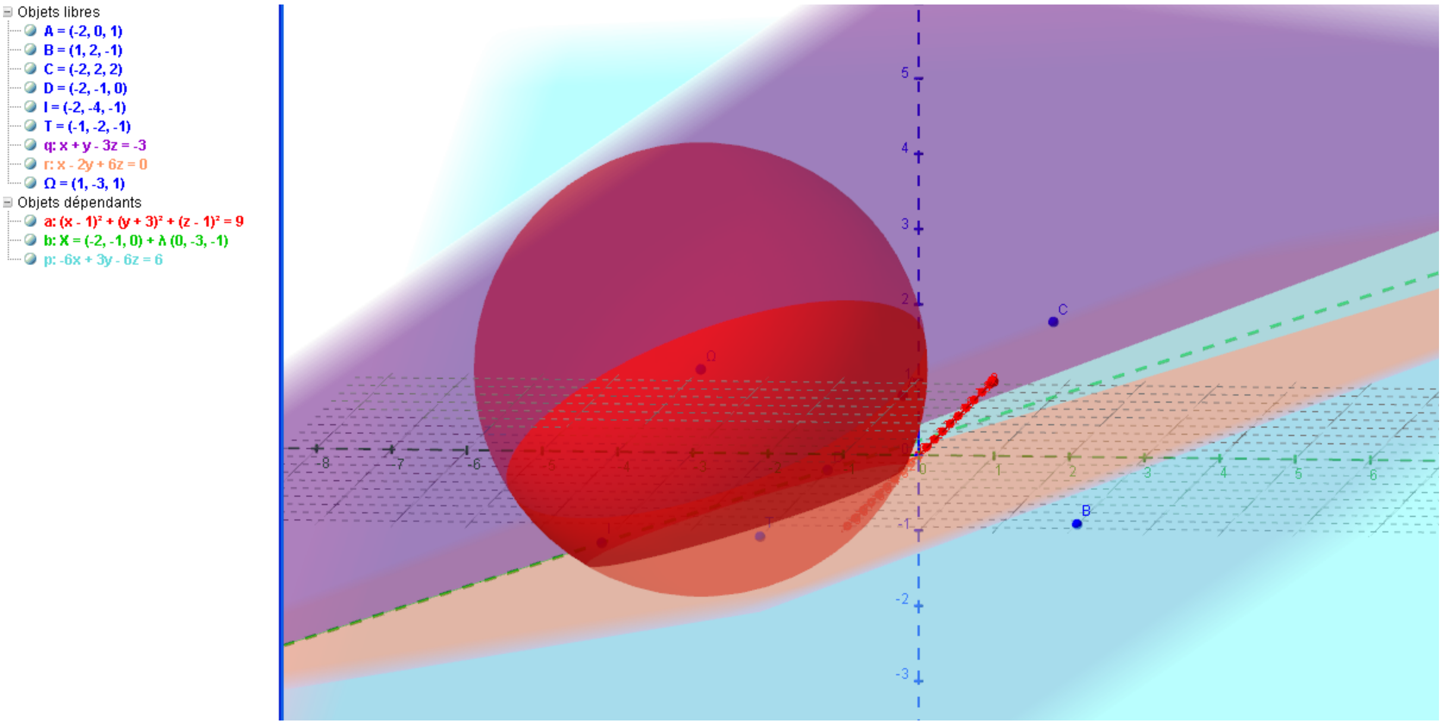
Détermination du paramètre *t*.
$\begin{cases}2x-y+2z+2=0\\x=-2\\y=-1+3t\\z=t\end{cases}$ implique $2(-2) - (-1 + 3t) + 2t + 2 = 0$.
On en tire : $t = -1$
Les coordonnées du point d'intersection sont : $\begin{cases}x=-2\\y=-4\\z=-1\end{cases}$. $I(-2 ; -4 ; -1)$
***5.** Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1 ; -3 ; 1)$ et de rayon $r = 3$.*
***a.** Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.*
Méthode :
Il suffit d'écrire avec les relations analytiques la caractérisation de la sphère : un point *M* de l'espace appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si $\Omega M = r$.
Comme les nombres sont positifs, cette égalité $\Omega M = r$ est équivalente à $\Omega M^2 = r^2$
Application :
Soit $M(x ; y; z) \in \mathscr{S}$
$M \in \mathscr{S}$ si et seulement si $\Omega M^2 = r^2$
si et seulement si $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 9$
En développant, réduisant, il vient :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z + 2 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
***b.** Étudier l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$.*
Les coordonnées des points d'intersection sont solutions du système $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+2=0\\x=-2\\y=-1+3t\\z=t\end{cases}$

Détermination du paramètre *t*.
$(-2)^2 + (-1 + 3t)^2 + t^2 - 2(-2) + 6(-1 + 3t) - 2t + 2 = 0$ qui est équivalent à :

$10t^2 + 10t + 5 = 0$, soit : $2t^2 + 2t + 1 = 0$
Comme le discriminant $\Delta = -4$, l'équation n'a aucune solution réelle.
La droite $\mathscr{D}$ ne coupe pas la sphère $\mathscr{S}$.
c. *Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère* $\mathscr{S}$ *.*
Méthode :
Il suffit de démontrer que la distance de Ω à (ABC) est égale au rayon.
En effet, la distance d'un point à un plan est la longueur du segment perpendiculaire au plan passant par ce point, et,
un plan tangent à $\mathscr{S}$ est un plan ayant un et un seul point commun T avec $\mathscr{S}$ et le rayon $[\Omega T]$ est perpendiculaire à (ABC).
Formule :
La distance d 'un point Ω à un plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est $d(\Omega\ ;\mathscr{P}) = \dfrac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
Application :
La distance $d(\Omega, (ABC)) = \dfrac{|2\times 1-(-3)+2\times 1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{9}{3} = 3$
Ce qui prouve le résultat.
Pour aller plus loin :
Coordonnées du point T.
On sait maintenant qu'il existe un et et un seul point T commun à $\mathscr{S}$ et à (ABC).
Ce point $T(x_T\ ; y_T\ ; z_T)$ est tel que $\overrightarrow{\Omega T}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
On a donc : il existe un réel u tel que $\begin{cases} x_T - 1 = 2u \\ y_T + 2 = -u \\ z_T - 1 = 2u \end{cases}$
Ce point T est un point du plan (ABC), d'où, $2(1 + u) - (-3 - u) + 2(1 + 2u) = 0$, soit : $u = -1$.
On trouve $T(-1\ ; -2\ ; -1)$

On peut remarquer : $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 9$ étant une équation de $\mathscr{S}$, le réel -1 est une des solutions de $(2u)^2 + (-u)^2 + (2u)^2 = 9$.


Objets libres
A = (-2, 0, 1)
B = (1, 2, -1)
C = (-2, 2, 2)
D = (-2, -1, 0)
I = (-2, -4, -1)
T = (-1, -2, -1)
q: x + y - 3z = -3
r: x - 2y + 6z = 0
Ω = (1, -3, 1)
Objets dépendants
a: (x - 1)² + (y + 3)² + (z - 1)² = 9
b: X = (-2, -1, 0) + λ (0, -3, -1)
p: -6x + 3y - 6z = 6
C
B
Ω