Exercice 1 (Une fonction rationnelle)

Les résultats doivent être justifiés par un calcul, une étude de signes, etc.

Toute affirmation faite à partir de la lecture sur un écran de calculatrice n'est pas valide, mais, une analyse de ce qui apparaît à l'écran peut être très utile pour bâtir la justification.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-x-4}{x-2}$

1) a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

$$ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \frac{ax^2+(b-2a)x+c-2b}{x-2}$$

Par identification des **coefficients**, on a: $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-1 \\ c-2b=-4 \end{cases}$ qui est équivalent à: $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$

on peut écrire $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{x-2}$.

b) Pour tout $h \neq 0$, $f(2 + h) + f(2 - h) = 3 + h - \dfrac{2}{h} + 3 - h - \dfrac{2}{-h} = 2\times 3$

Le point $\Omega(2; 3)$ est un centre de symétrie de C_f représentation graphique de f.

Commentaire:

Reconnaître les formules permettant de déterminer le milieu de ...

Si M(2 + h, f(2 + h) et M ' (2 – h; f(2 – h)), les coordonnées du milieu de [MM '] sont ....

2) a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la représentation graphique C_f de f dans un repère.

On a d'après 1): $f(x) - (x + 1) = -\dfrac{2}{x-2}$

Or, on sait: $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2 = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x-2} = 0$

Ce qui prouve que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la représentation graphique de f dans un repère.

De même en $-\infty$.

b) Déterminer la position relative de C_f et Δ.

Méthode:

La position relative des courbes est donnée par le **signe** de la différence,

d'où on cherche le **signe** de $\dfrac{-2}{x-2}$.

Commentaire:

Chercher un signe revient à résoudre une inéquation (et non pas une équation)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
-2	$-$	‖	$-$
$x-2$	$-$	‖	$+$
$\frac{-2}{x-2}$	$+$	‖	$-$
Position relative de C_f et Δ	C_f au-dessus de Δ	‖	C_f au-dessous de Δ

3) Calculer la limite à droite de f en 2.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x-2 = 0$ et $x-2>0$, donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{1}{x-2} = +\infty$, puis, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{-2}{x-2} = -\infty$.

Remarque: *La même démarche pour la limite à gauche mène à:* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{-2}{x-2} = +\infty$. *(car, $x-2<0$)*

Or, $\lim\limits_{x\to 2} x+1 = 3$

Conclusion: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$.

***Remarque**: On peut aussi prendre la forme initiale:*

$\lim\limits_{x\to 2} (x^2-x-4) = 2^2-2-4=-2$ *qui est un réel négatif, d'où,* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x^2-x-4}{x-2} = -\infty$ *(et de même à gauche de 2, ...)*

4) a) Calculer la dérivée $f'(x)$.

f est la somme des deux fonctions $u: x \mapsto x+1$ et $v: x \mapsto -\frac{2}{x-2}$ qui ont pour dérivées respectives les fonctions $u': x \mapsto 1$ et $v': x \mapsto -\frac{-2}{(x-2)^2} = \frac{2}{(x-2)^2}$

On a alors: $f'(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$

Autre méthode:

On peut aussi utiliser la dérivée d'un quotient:

$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-2)-1\times(x^2-x-4)}{(x-2)^2} = ... = \frac{x^2-4x+6}{(x-2)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

$f'(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$

Comme la somme de deux nombres strictement positifs est positive, $f'(x)$ est strictement positive et la fonction

f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; 2[$ et $]2; +\infty[$

Autre méthode:

$f'(x) = \dfrac{x^2-4x+6}{(x-2)^2}$ On calcule le discriminant Δ du numérateur $N(x)$: $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$

Comme $\Delta < 0$, $N(x)$ est du signe du coefficient de x^2; il vient: ... $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Dans tous les cas, **l'étude du signe de la dérivée est nécessaire.**

Exercice 2 (calculs dans $\mathbb{C}$)

Les questions suivantes sont **indépendantes**

1) x et y sont des réels.

Déterminer x et y tels que $2x + iy - i(x + iy) = 3 - i$

$2x + iy - i(x + iy) = 3 - i$ équivaut à $2x + y + i(y - x) = 3 - i$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont égales.

Commentaire:

La partie réelle et la partie imaginaire sont des nombres réels.

La méthode d'identification des coefficients à l'exercice 1 et la méthode d'identification des parties réelles et des parties imaginaires relèvent du même modèle mathématique:

On obtient le système: $\begin{cases} 2x+y=3 \\ -x+y=-1 \end{cases}$

Par différence, on a: $3x = 4$, soit $x = \dfrac{4}{3}$ et $y = -1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$

Vérification: l'équation initiale en remplaçant x par $\dfrac{4}{3}$ et y par $\dfrac{1}{3}$ donne: ....

Conclusion: $2x + iy - i(x + iy) = 3 - i$ lorsque $x = \dfrac{4}{3}$ et $y = \dfrac{1}{3}$

2) Mettre les nombres complexes z_1 et z_2 sous leur forme algébrique, puis sous leur forme trigonométrique.

*(Une lecture graphique **justifiée** est suffisante)*

$z_1 = \dfrac{1+i}{1-i} - 2i = \dfrac{(1+i)(1+i)}{2} - 2i = ... = i - 2i = -i$ (*forme algébrique*)

Le point d'affixe –i est sur l'axe des ordonnées avec une ordonnée négative, d'où,

$z_1 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = ...$ (*forme trigonométrique*) (une seule écriture suffit)

$z_2 = \dfrac{1}{1-3\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1+3\mathrm{i}} = \dfrac{1+3\mathrm{i}+1-3\mathrm{i}}{(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ (*forme algébrique*)

Le point d'affixe $\dfrac{1}{5}$ est sur l'axe des abscisses avec une abscisse positive, d'où,

$z_2 = \dfrac{1}{5}(\cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi)) = \dfrac{1}{5}(\cos(0) + \mathrm{i}\sin(0)) = ...$ (*forme trigonométrique*) (une seule écriture suffit)

On peut aussi remarquer qu'en posant $z = \dfrac{1}{1+3\mathrm{i}}$, $z_2 = z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z) = 2\times\dfrac{1}{10}$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

a) $\mathrm{i}(z + 1) + 2 + 3\mathrm{i} = z$ équivaut à $z(-1 + \mathrm{i}) = -2 - 4\mathrm{i}$, d'où, $z = \dfrac{(-2-4\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{2} = (1 + 2\mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) = -1 + 3\mathrm{i}$

$S_a = \{-1 + 3\mathrm{i}\}$

Commentaire:

Reconnaître une équation du premier degré

b) $(z^2 + 9 = 0)$ équivaut à $(z^2 - 9\mathrm{i}^2 = 0)$ équivaut à $(z^2 - (3\mathrm{i})^2 = 0)$ équivaut à $(z - 3\mathrm{i})(z + 3\mathrm{i}) = 0$

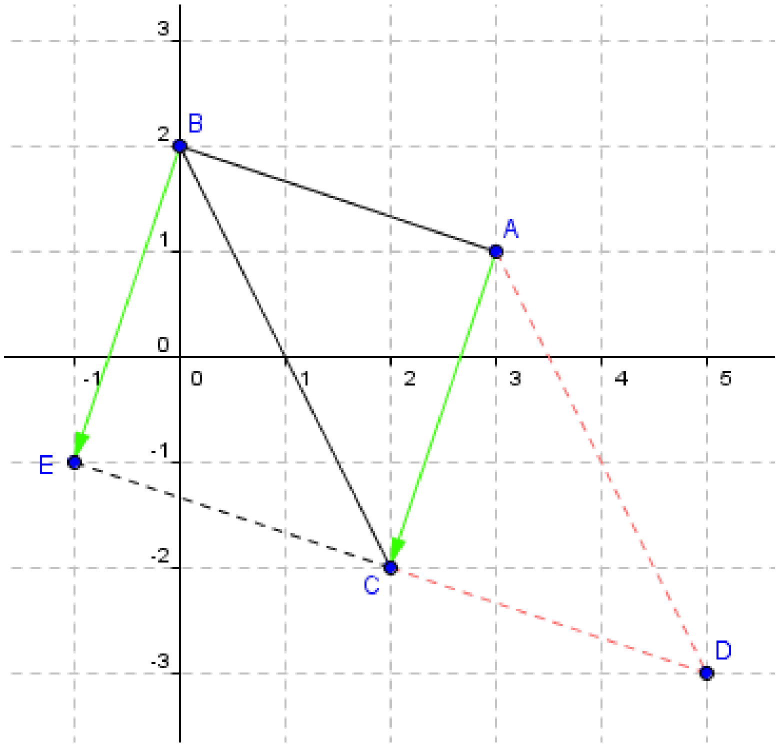
$S_b = \{-3\mathrm{i}; 3\mathrm{i}\}$

Commentaire:

*Quels sont **tous les** nombres qui élevés au carré donnent ...*

Exercice 3 (géométrie et complexes)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$
On donne les points A, B et C d'affixes respectives: $z_A = 3 + \mathrm{i}$, $z_B = 2\mathrm{i}$, $z_C = 2 - 2\mathrm{i}$



I) Déterminer les écritures trigonométriques de z_B et z_C

$z_B = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ et z_C a pour module $|z_C| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$ et pour argument θ tel que $\cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Une mesure de θ est $-\frac{\pi}{4}$, d'où, $z_C = 2\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$.

II-

1) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = 2i - (3 + i) = -3 + i$,

$z_{\overrightarrow{AC}} = (2 - 2i) - (3 + i) = -1 - 3i$,

$z_{\overrightarrow{BC}} = (2 - 2i) - 2i = 2 - 4i$

2) Quelle est la nature du triangle *ABC*? Justifier votre réponse.

On a alors: $|z_{\overrightarrow{AB}}| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$, $|z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$ et $|z_{\overrightarrow{BC}}| = \sqrt{2^2+(-4)^2} = 2\sqrt{5}$

On en déduit: $AB = AC = \sqrt{10}$ et $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Le triangle *ABC* est un triangle rectangle isocèle en *A*.

Commentaire:

Commencez par analyser une figure géométrique. On " voit " ...

Ensuite, on cherche à prouver ce qui est vu ...

Quels sont les " outils " actuellement permettant de prouver

- triangle rectangle

- triangle isocèle

On peut être tenté par l'étude du quotient des affixes

$$\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-1-3\,\mathrm{i}}{-3+\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(-3+\mathrm{i})}{-3+\mathrm{i}} = i$$

Comme $|\mathrm{i}| = 1$, *on a alors:* $\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right| = \left|z_{\overrightarrow{AC}}\right|$

Comme arg(i) $= \frac{\pi}{2} + k\pi$ *;* $k \in \mathbb{Z}$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

3) Déterminer l'affixe de D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

On veut: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, soit: $z_D - z_A = 2 - 4i$.

Le point D a pour affixe: $z_D = 2 - 4i + 3 + i = 5 - 3i$

4) a) Déterminer l'affixe de E image de B dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

On veut: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$, soit: $z_E = -1 - 3i + 2i = -1 - i$

b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABEC$? justifier votre réponse.

Puisque $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$, $ABEC$ est un parallélogramme.

Puisque $AB = AC$, le parallélogramme $ABEC$ est un losange.

Puisque $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$, le losange $ABEC$ est un carré.

Commentaires:

il y a un ordre dans la lecture des sommets d'un polygone … le quadrilatère ABCD ou *ADCB* ou *CDAB* ou …
<u>*n'est pas le quadrilatère*</u> *ABDC*

Donnez toutes les conditions suffisantes pour un carré. (Vous pouvez consulter dans les " fiches techniques " , celle intitulée: Parallélogramme-rectangle- losange- carré)

III- *Rappel:*

On peut si besoin utiliser le résultat suivant vu en cours: $z_A \neq z_B$ *et* $z_C \neq z_D$, *arg* $\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA})$ $[2\pi]$

On pose $Z = \frac{z-2\,\mathrm{i}}{z-2+2\,\mathrm{i}}$ avec $z \neq z_C$

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$.

On sait que l'affixe de $\overrightarrow{BM}$ est $z - 2i$ et celle de $\overrightarrow{CM}$ est $z - 2 + 2i$.

On a alors: $|Z| = \left|\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z-2+2\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|z-2\mathrm{i}|}{|z-2+2\mathrm{i}|} = \dfrac{BM}{CM}$

$|Z| = 1$ équivaut à $M \neq C$ et $BM = CM$.

$\mathcal{E}$ est la médiatrice de $[BC]$, c'est donc la droite (AE).

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points $M(z)$ tels que Z est un réel.

Z est un réel si et seulement si $Z = 0$ ou $\arg(Z) = 0\ [\pi]$.

$\arg(Z) = 0\ [\pi]$ mène à $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BM}) = 0\ [\pi]$.

Les points B, C, M sont alignés.

Z est un réel équivaut à ($M \neq C$ et $M \in (BC)$)

$\mathcal{F}$ est la droite (BC) privée de C.

3)Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points $M(z)$ tels que Z est un imaginaire pur.

Z est un imaginaire pur si et seulement si $Z = 0$ ou $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

$\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ mène à $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BM}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

BMC est un triangle rectangle en M.

Comme $M \neq C$ et qu'on peut avoir $M = B$

$\mathcal{H}$ est le cercle de diamètre $[BC]$ privé de B.

Exercice 4 (*Équations de cercles*)

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(4; 2)$ et $B(-2; -2)$.

a) Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$

Un point $M(x; y) \in \mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

Un point $M(x; y) \in \mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si $(x-4)(x+2) + (y-2)(y+2) = 0$

$(x-4)(x+2) + (y-2)(y+2) = 0$ est une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$

En développant, réduisant, il vient: $x^2 + y^2 - 2x - 12 = 0$

En mettant sous la forme canonique: $(x-1)^2 + y^2 = 13$

b) Démontrer que le point $C(3; -3)$ est un point de $\mathcal{C}_1$.

En remplaçant x par 3 et y par -3 dans une des équations précédentes, on montre qu'on a une égalité:

par exemple: $(3-1)^2 + (-3)^2 = \ldots = 13$

Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_1$ en C.

Soit I le centre du cercle.

Une méthode:

Soit on cherche le milieu de $[AB]$: $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = ... = 1$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = ... = 0$

Une autre méthode:

Soit on utilise la forme canonique: $(x-1)^2 + y^2 = 13$

$I(1; 0)$

Un point $M(x; y) \in T$ si et seulement si $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$

Un point $M(x; y) \in T$ si et seulement si $(x-3)(3-1) + (y+3)(-3) = 0$

$2x - 3y - 15 = 0$ est une équation de T (ou encore: $y = \dfrac{2}{3}x - 5$)

c) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}_2$ des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$

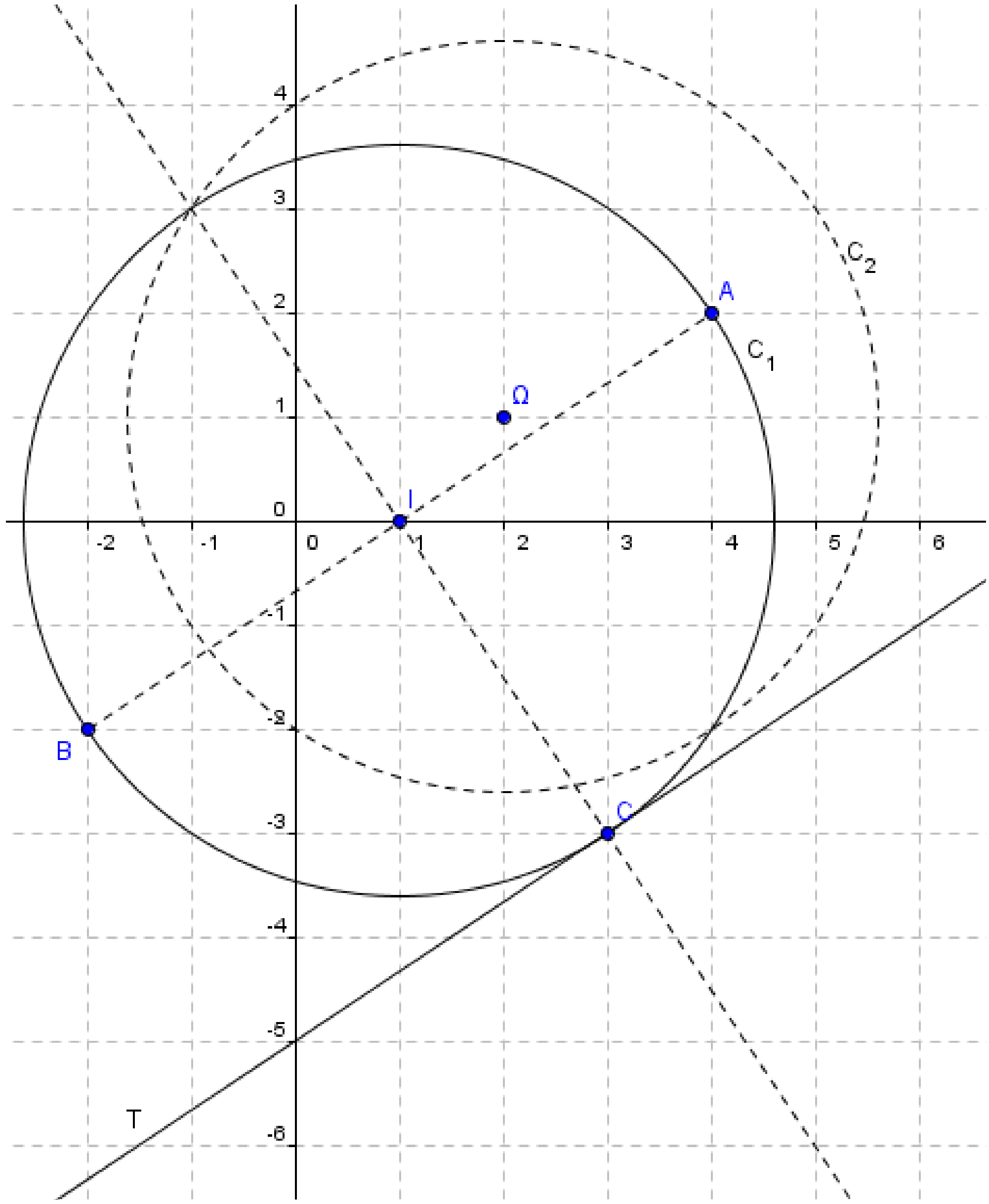
Comme $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$ équivaut à $(x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 8 = 0$ équivaut à $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$

l'ensemble $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre $\Omega(2; 1)$ et de rayon $\sqrt{13}$

Commentaires:

Bien savoir comment on définit géométriquement un cercle (définitions et propriétés caractéristiques)

(Vous pouvez consulter dans les " fiches techniques " , celle intitulée: ***Équations de cercles*** *)*



C2
A
C1
Ω
I
B
C
T