La note tiendra compte de toute initiative **cohérente**. Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat mais que vous savez l'utiliser dans la suite de l'exercice, écrivez clairement que vous admettez ce résultat avant de l'utiliser.

Exercice 1 Démonstration par récurrence 3 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2n + 1$ et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = (n+1)^2$

Exercice 2 Vrai- Faux 3 points

Dire si les propositions suivantes (nommées P_n) sont vraies ou fausses.

Si la proposition est vraie, la démontrer. Si la proposition est fausse, justifier à l'aide d'un contre-exemple:

(Dans ce cas (proposition fausse), souvent un bon schéma vaut mieux qu'un long discours)

P_1: La fonction $x \mapsto e^{-x} + 1$ est une solution de l'équation différentielle $y' = -y + 1$

P_2: Pour tout x réel, $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

P_3: Si $ABCD$ est un losange alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

P_4: Un quadrilatère qui a ses diagonales de même longueur est un rectangle

P_5: x est un réel. $x^2 \geqslant 4$ si et seulement si $x \geqslant 2$

P_6: z_1 et z_2 sont deux nombres complexes. Si $|z_1| = 5$ et $|z_2| = 2$ alors $|z_1 + z_2| = 7$

Exercice 3 Équations dans $\mathbb{C}$ 2 points

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + \overline{z} = 1 + i$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{z}{z+1} = 1 + i$

Exercice 4 6 points

f est la fonction solution de l'équation différentielle (E): $y' = \dfrac{1}{2}y + 2$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

Première partie: (Approximation)

On cherche une valeur approchée de $f(2)$ par la méthode d'Euler.

Pour cela, on construit une suite de points $M_n(x_n; y_n)$ avec un pas égal à 0,5.

1) Justifier que M_0 a pour coordonnées (0; 1)

2) Calculer les coordonnées de M_1.

3) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) vérifient les relations: $x_{n+1} = x_n + 0,5$ et $y_{n+1} = 1,25y_n + 1$

4) On pose $u_n = y_n + 4$

Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

5) Montrer que $y_n = 5\times\left(\dfrac{5}{4}\right)^n - 4$

6) Donner une valeur approchée de $f(2)$.

Deuxième partie: (résolution de (E))

1) Donner (on peut appliquer le cours) les solutions de l'équation (E).

2) Donner la solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$

<u>Exercice 4 6 points</u>

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$

A est le point d'affixe $z_A = -\mathrm{i}$ et B est celui d'affixe $z_B = 3 - \mathrm{i}$.

M est un point d'affixe z.

Partie I-

On pose $Z = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-3+\mathrm{i}}$ avec $z \neq 3 - \mathrm{i}$

1) Vérifier que $Z = \dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ et donner une interprétation géométrique de $|Z|$ et de $\arg(Z)$

2) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que Z est un réel.

3) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M tels que Z est un imaginaire pur.

4) Déterminer l'ensemble $\mathscr{H}$ des points M tels que $|Z| = 1$

Partie II- (<u>très dépendante de la partie I)</u>

On pose $Z' = \mathrm{i}.Z$

1) Montrer que $|Z'| = |Z|$ et que $\arg(Z') = \arg(Z) + \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

2) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}'$ des points M tels que Z' est un réel.

3) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}'$ des points M tels que Z' est un imaginaire pur.

4) Déterminer l'ensemble $\mathscr{H}'$ des points M tels que $|Z'| = 1$

✂...✂

Rappel: Prochain DS: DS3 le mercredi 24 novembre 2010 (sauf si les conseils de classe sont très tôt ...)

DM4 à rendre vendredi 5 novembre 2010

Exercice F page 289;

19 page 155

23 page 155

33 page 91

35 page 92