Exercice 1 Démonstration par récurrence 3 points

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = 2n + 1$ et $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n = (n + 1)^2$

Soit P(n) la proposition suivante: pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n = (n + 1)^2$

Initialisation:

P(0): $S_0 = u_0 = 2\times 0 + 1 = 1$ et $(0 + 1)^2 = 1^2 = 1$ L'égalité est vérifiée

Hérédité:

Soit un entier naturel k tel que P(k) est vérifiée (c-à-d. on admet l'égalité $S_k = (k + 1)^2$)

(*Objectif: il s'agit de montrer que cette hypothèse amène grâce à la définition de S_n P(k + 1), c-à-d. l'égalité: $S_{k+1} = ((k +1) + 1)^2$*)

$S_{k+1} = S_k + u_{k+1}$ par définition de la somme

$S_{k+1} = (k + 1)^2 + [2(k + 1) + 1]$ d'après l'hypothèse de récurrence et la définition de la suite (u_n)

$S_{k+1} = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2 = ((k +1) + 1)^2)$

Ce qui prouve P(k + 1)

Conclusion:

P(0) est vraie

P(k) ⇒ P(k + 1)

D'après l'axiome de récurrence, la proposition est P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Complément:

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.
La somme de u_0 à u_n contient $n + 1$ termes et d'après les propriéts des suites arithmétiques, la somme vaut :

$$\frac{(\text{ premier terme } + \text{dernier terme })\times \text{nombre de termes}}{2} = \frac{(1+(2n+1))\times(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)(n+1)}{2} = (n+1)^2$$

Exercice 2 Vrai- Faux 3 points

Dire si les propositions suivantes (nommées P_n) sont vraies ou fausses.

Si la proposition est vraie, la démontrer. Si la proposition est fausse, justifier à l'aide d'un contre-exemple:

(Dans ce cas (proposition fausse), souvent un bon schéma vaut mieux qu'un long discours)

P_1: La fonction $x \mapsto e^{-x} + 1$ est une solution de l'équation différentielle $y' = -y + 1$

La dérivée de f: $x \mapsto e^{-x} + 1$ est f' : $x \mapsto -e^{-x}$

Comme $-e^{-x} = -(e^{-x} + 1) + 1$ $f'(x) = -f(x) + 1$

La proposition est vraie

Autre méthode:

L'équation $y' = -y + 1$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -1$ et $b = 1$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, soit, $x \mapsto Ce^{-x} - (-1)$

Lorsque $C = 1$, on obtient la fonction: $x \mapsto e^{-x} + 1$

P_2: Pour tout x réel, $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

Remarquer: $e^{-x} \times e^x = 1$

En multipliant numérateur et dénominateur par e^{-x} , on a: $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{(e^x - 1)e^{-x}}{(e^x + 1)e^{-x}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

La proposition est vraie

Autre calcul:

$$\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^x - 1}{e^x} \times \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

ou encore:

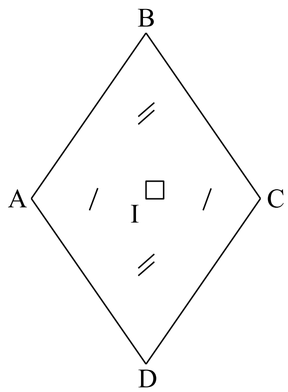
$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} - \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{(e^x - 1)(1 + e^{-x}) - (1 - e^{-x})(e^x + 1)}{(e^x + 1)(1 + e^{-x})} = \frac{e^x + 1 - 1 - e^{-x} - (e^x + 1 - 1 - e^{-x})}{(e^x + 1)(1 + e^{-x})} = 0$$

d'où, $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

P_3: Si ABCD est un losange alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

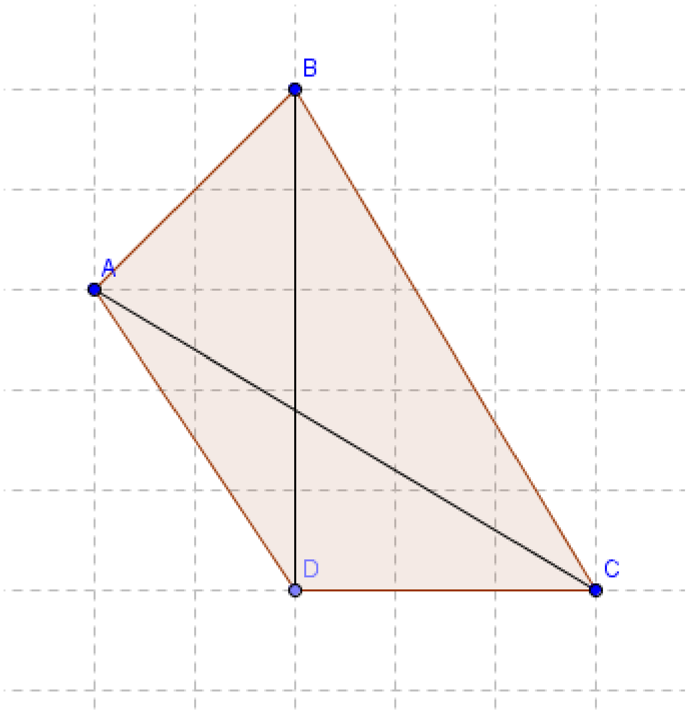
Faire un losange

La proposition est fausse (les vecteurs ne sont pas de même direction)



P_4: Un quadrilatère qui a ses diagonales de même longueur est un rectangle

Faire un quadrilatère en ne respectant que la seule condition: diagonales de même longueur



La proposition est fausse (les diagonales ne se coupent pas nécessairement en leur milieu)

rappel: Un carré est un rectangle (la réciproque est fausse)

Autrement dit: Si un quadrilatère est un carré alors il possède les propriétés du rectangle.

P_5: x est un réel. $x^2 \geqslant 4$ *si et seulement si* $x \geqslant 2$

La proposition est fausse

Contre-exemple:

$x = -3$ $(-3)^2 \geqslant 4$ mais $-3 < 2$

Remarque:

Si $x^2 \geqslant 4$ alors $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$ est une phrase vraie

Si $x \leqslant -2$ alors $x^2 \geqslant 4$ est une phrase vraie

Si $x \geqslant 2$ alors $x^2 \geqslant 4$ est une phrase vraie

P_6: z_1 et z_2 sont deux nombres complexes. Si $|z_1| = 5$ *et* $|z_2| = 2$ *alors* $|z_1+z_2| = 7$

La proposition est fausse

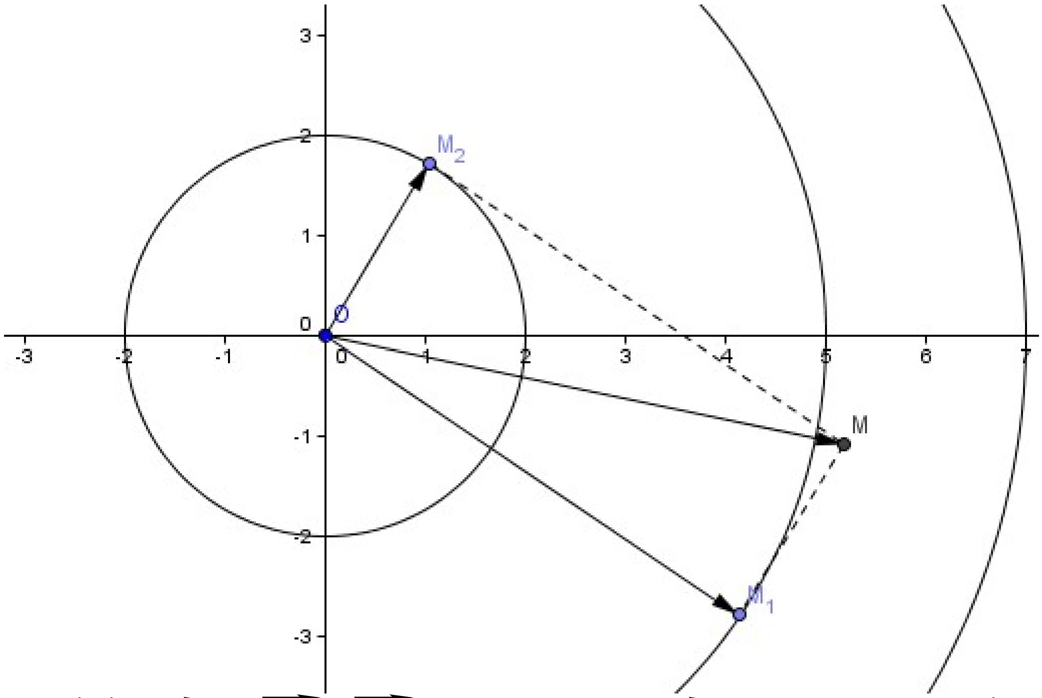
Contre-exemple:

$z_1 = 3 + 4i$ a pour module $|3+4\,i| = 5$

$z_2 = 2$ a pour module 2

$z_1 + z_2 = 3 + 4i + 2 = 5 + 4i$ a pour module $\sqrt{25+16} = \sqrt{51}$

On peut faire un cercle de centre O de rayon 5, un cercle de centre O de rayon 2 et un cercle de centre O et de rayon 7....



$OM_1 = |z_1|$; $OM_2 = |z_2|$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$, d'où, l'affixe de $\overrightarrow{OM}$ est $z_1 + z_2$ et $OM = |z_1 + z_2|$

La proposition est fausse

<u>Exercice 3 Équations dans ℂ 2 points</u>

1) Résoudre dans ℂ l'équation $2z + \bar{z} = 1 + \text{i}$

On pose $z = x + \text{i}y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

$2z + \bar{z} = 1 + \text{i} \Leftrightarrow 2(x + \text{i}y) + (x - \text{i}y) = 1 + \text{i} \Leftrightarrow 3x + \text{i}y = 1 + \text{i}$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$$2z + \bar{z} = 1 + \text{i} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

l'équation $2z + \bar{z} = 1 + \text{i}$ a pour unique solution $\dfrac{1}{3} + \text{i}$

2) Résoudre dans ℂ l'équation $\dfrac{z}{z+1} = 1 + \text{i}$

$z \neq -1$.

$$\frac{z}{z+1} = 1 + \text{i} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ z = (z+1)(1+\text{i}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ z = z + \text{i}z + 1 + \text{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ \text{i}z = -1 - \text{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ z = -1 + \text{i} \end{cases}$$

l'équation $\dfrac{z}{z+1} = 1 + \text{i}$ a pour unique solution $-1 + \text{i}$

Exercice 4 6 points

f est la fonction solution de l'équation différentielle (E): $y' = \frac{1}{2}y + 2$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

Première partie: (Approximation)

On cherche une valeur approchée de $f(2)$ par la méthode d'Euler.

Rappel:

Pour h suffisamment petit, on sait: $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h\times f'(x_0)$

Dans la construction par la méthode d'Euler, un point d'abscisse x a pour ordonnée y qui est l'approximation de $f(x)$ par la relation précédente.

La valeur approchée de y' est obtenue par l'équation (E)

Pour cela, on construit une suite de points $M_n(x_n; y_n)$ avec un pas égal à 0,5.

1) Justifier que M_0 a pour coordonnées (0; 1)

Comme $f(0) = 1$, le point de départ M_0 a pour coordonnées (0; 1).

2) Calculer les coordonnées de M_1.

$x_1 = x_0 + 0{,}5 = 0{,}5$ et $y_1 = y_0 + 0{,}5\times y'_0$ où $y'_0 = \frac{1}{2}y_0 + 2$

$y_1 = 1 + 0{,}5\times(\frac{1}{2}\times 1 + 2) = 1 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4}$

3) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) vérifient les relations: $x_{n+1} = x_n + 0{,}5$ et $y_{n+1} = 1{,}25y_n + 1$

$x_{n+1} = x_n + 0{,}5$ car, pour obtenir l'abscisse du point , on ajoute le pas 0,5 à celle du point

$y_{n+1} = y_n + 0{,}5\times y'_n$ où $y'_n = \frac{1}{2}y_n + 2$

$y_{n+1} = y_n + 0{,}5\times(\frac{1}{2}y_n + 2) = 1{,}25y_n + 1 = \frac{5}{4}y_n + 1$

4) On pose $u_n = y_n + 4$

remarquer: $y_n = u_n - 4$

Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

$u_{n+1} = y_{n+1} + 4 = 1{,}25y_n + 1 + 4 = 1{,}25(y_n + 4) = 1{,}25u_n$.

(ou encore: $u_{n+1} = y_{n+1} + 4 = 1{,}25y_n + 1 + 4 = 1{,}25(u_n - 4) + 5 = 1{,}25u_n$.

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $1{,}25 = \frac{5}{4}$ et de premier terme $u_0 = y_0 + 4 = 5$

5) Montrer que $y_n = 5\times\left(\frac{5}{4}\right)^n - 4$

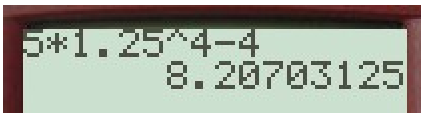
On en déduit: $u_n = u_0\times\left(\frac{5}{4}\right)^n = 5\times\left(\frac{5}{4}\right)^n$,

puis, $y_n = 5\times\left(\frac{5}{4}\right)^n - 4$

6) Donner une valeur approchée de $f(2)$.

Le pas étant de 0,5, pour calculer une valeur approchée de $f(2)$, on calcule y_4

$y_4 = 5\times\left(\frac{5}{4}\right)^4 - 4 \approx 8{,}207$



On peut aussi calculer de proche en proche

n	x	y	y'
0	0	1	$\frac{1}{2}y + 2 = 2{,}5$
1	0,5	$1 + 2{,}5\times0{,}5 = 2{,}25$	$\frac{1}{2}y + 2 = 3{,}125$
2	1	$2{,}25+3{,}125\times0{,}5=3{,}8125$	3,90625
3	1,5	5,765625	4,8828125
4	2	8,20703125	

Deuxième partie: (résolution de (E))

1) Donner (on peut appliquer le cours) les solutions de l'équation (E).

Cours: Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a et b sont des constantes réelles ont pour solutions les fonctions: $x \mapsto A\exp(ax) - \frac{b}{a}$.

Les solutions de $y' = \frac{1}{2}y + 2$ sont donc les fonctions $x \mapsto A\exp(\frac{1}{2}x) - 4$ où $A \in \mathbb{R}$.

2) Donner la solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$

Pour déterminer la constante A, on a: $A\exp(\frac{1}{2}\times0) - 4 = 1$, d'où, $A = 1 + 4 = 5$

La solution de $y' = \frac{1}{2}y + 2$ vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction $x \mapsto 5\exp(\frac{1}{2}x) - 4$.

Exercice 4 6 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

A est le point d'affixe $z_A = -i$ et B est celui d'affixe $z_B = 3 - i$.

M est un point d'affixe z.

Partie I-

On pose $Z = \dfrac{z+i}{z-3+i}$ avec $z \neq 3 - i$

1) Vérifier que $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ Évident

et donner une interprétation géométrique de $|Z|$ et de $\arg(Z)$

$$|Z| = \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = \frac{AM}{BM}$$

et

$\arg(Z) = \arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que Z est un réel.

Z est un réel si et seulement si (($z \neq 3 - i$) et ($Z = 0$ ou $\arg(Z) = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$))

Z est un réel si et seulement si (($z \neq 3 - i$) et ($z = -i$ ou $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$))

Z est un réel si et seulement si (($M \neq B$) et ($M = A$ ou $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires))

l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que Z est un réel est la droite (AB) privée de B.

3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M tels que Z est un imaginaire pur.

Z est un imaginaire pur si et seulement si (($z \neq 3 - i$) et ($Z = 0$ ou $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$))

Z est un imaginaire pur si et seulement si (($z \neq 3 - i$) et ($z = -i$ ou $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$))

Z est un imaginaire pur si et seulement si (($M \neq B$) et ($M = A$ ou $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ orthogonaux))

l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M tels que Z est un imaginaire pur est le cercle de diamètre [AB] privé de B.

4) Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M tels que $|Z| = 1$

$|Z| = 1$ si et seulement si $\frac{AM}{BM} = 1$ et $M \neq B$.

l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M tels que $|Z| = 1$ est la médiatrice du segment [AB].

Partie II- (très dépendante de la partie I)

On pose $Z' = i.Z$

1) Montrer que $|Z'| = |Z|$ et que $\arg(Z') = \arg(Z) + \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

$|Z'| = |i.Z| = |i| \times |Z| = |Z|$, car, $|i| = 1$

$\arg(Z') = \arg(iZ) = \arg(i) + \arg(Z) = \arg(Z) + \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$, car, $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}'$ des points M tels que Z' est un réel.

Z' est un réel si et seulement si (($z \neq 3 - i$) et ($Z' = 0$ ou $\arg(Z') = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$))

D'après la partie II-1/, on a:

Z' est un réel si et seulement si (($z \neq 3 - i$) et ($Z = 0$ ou $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$))

L'ensemble $\mathcal{E}' = \mathcal{F}$ d'après la partie I-

3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}'$ des points M tels que Z' est un imaginaire pur.

Z' est un imaginaire pur si et seulement si (($z \neq 3 - \mathrm{i}$) et ($Z' = 0$ ou $\arg(Z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$))

D'après la partie II-1/, on a:

Z' est un imaginaire pur si et seulement si (($z \neq 3 - \mathrm{i}$) et ($Z = 0$ ou $\arg(Z) = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$))

L'ensemble $\mathcal{F}' = \mathcal{E}$ d'après la partie I-

4) Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}'$ des points M tels que $|Z'| = 1$

Comme $|Z'| = |Z|$, $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$.