Nom: …...	Prénom: …...	
Classe: TSVT2 DS3	(1h30)	Mardi 23 novembre 2010
		Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

La note tiendra compte de toute initiative **<u>cohérente</u>**.

Petit formulaire:

Résultats du cours sur la fonction exponentielle qui peuvent être utiles:

La fonction $x \mapsto e^x$ a pour dérivée $x \mapsto e^x$

Si u est une fonction dérivable sur I alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' e^u$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$, $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{e^h-1}{h} = 1$

Exercice 1 (QCM) *8 points*

Pour chaque item,

entourez la ou les propositions vraies,

rayez la ou les propositions fausses.

Une réponse correcte de votre part (c'est-à-dire: vous avez entouré une proposition vraie ou rayé une proposition fausse) amène 0,5 point.

Une réponse incorrecte de votre part (c'est-à-dire: vous avez entouré une proposition fausse ou rayé une proposition vraie) enlève 0,25 point.

Item 1 (application de la dérivée de e^u)	La fonction f', dérivée de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$, est la fonction définie par			
	$f' \ x \mapsto e^{-x^2}$	$f' \ x \mapsto -2x\ e^{-x^2}$	$f' \ x \mapsto e^{-2x}$	$f' \ x \mapsto \dfrac{-2x}{e^{x^2}}$
	Commentaire: la fonction f est de la forme e^u avec $u : x \mapsto -x^2$ qui a pour dérivée: $u' : x \mapsto -2x$ D'autre part: $e^{-X} = \dfrac{1}{e^X}$			
Item 2 Reconnaissance des valeurs usuelles: i est le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ -1 est le nombre de module 1 et d'argument π. repérage du nombre $-1+i$ qui est le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $-\dfrac{\pi}{4}$.	Le nombre complexe $e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\pi}$ est égal au nombre complexe			
	$e^{i\frac{3\pi}{2}}$	$1+i$	$-1+i$	$\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$
	Commentaire: $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{i\pi} = -1$ $\lvert -1+i \rvert = \sqrt{2}$ et $\arg(-1+i) = -\dfrac{\pi}{4}$			

Item 3 Compréhension d'une définition: $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ est l'écriture du nombre complexe de module r et d'argument θ.	Le nombre complexe $-3\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est le nombre complexe de module			
	-3	3	9	$\frac{\pi}{6}$
	Commentaire: Le module est un réel positif. $-3 = 3\times(-1)$ et $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ $-3\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 3\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 3\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$			
Item 4 Voir item 3 et se souvenir qu'un argument est défini à un multiple entier de tours près. ($+\ 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$)	Un argument du nombre complexe $-\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\ 3$ est			
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$
	Commentaire: Voir item 3 et d'autre part: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$			

Exercice 2 ***3 points***

En utilisant l'**écriture exponentielle** d'un complexe, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 4\bar{z}$

Deux cas: $z = 0$ ou $z = r\ \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

0 est solution

$z^3 = r^3\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}$ et $\bar{z} = r\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)}$

$$z^3 = 4\bar{z} \iff \begin{cases} z=0 \\ \text{ou} \\ r^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}=4re^{\mathrm{i}(-\theta)} \end{cases}$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux modulo 2π

On a donc: $\begin{cases} r^3=4r \\ 3\theta=-\theta+k2\pi \end{cases} \begin{pmatrix} r>0 \\ k\in\mathbb{Z} \end{pmatrix}$.

$r^3 = 4\ r \iff r^3 - 4r = 0 \iff r(r^2 - 4) = 0 \iff r(r-2)(r+2) = 0$

Comme $r > 0$, on obtient: $r = 2$

$3\theta + \theta = k\ 2\ \pi$, d'où, $\theta = k\ \frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$.

On prend 4 valeurs consécutives de k afin de faire un tour complet.

si $k = 0$, $\theta = 0$, si $k = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, si $k = 2$, $\theta = \pi$, si $k = 3$, $\theta = 3\ \frac{\pi}{2}$.

Les solutions sont: 0; $2\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0} = 2$; $2\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{i}$; $2\ \mathrm{e}^{i\pi} = -2$, $2\ \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = -2\mathrm{i}$

Exercice 3

Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat mais que vous savez l'utiliser dans la suite de l'exercice, écrivez clairement que vous admettez ce résultat avant de l'utiliser.

Partie I- Étude d'une fonction (certains résultats obtenus à la partie I- dont utiles dans la partie II-)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,\mathrm{e}^x - 2x + 1$

1) a) **<u>Étudier</u>** la limite de f en $-\infty$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1 \end{cases}$ d'où, d'après la limite d'une somme de fonctions, on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que la droite d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote à la courbe représentative de f dans un repère.

$f(x) - (-2x + 1) = 2\,\mathrm{e}^x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\,\mathrm{e}^x = 0$, d'où, la droite d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

2) En remarquant que $f(x) = \mathrm{e}^x \left(2 - 2\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$, **<u>étudier</u>** la limite de f en $+\infty$.

On sait: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$,

On a donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - 2\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = 2$

et, d'après la limite d'un produit de fonctions, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) a) Déterminer l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.

f est la somme de $x \mapsto 2\,\mathrm{e}^x$ et de $x \mapsto -2x + 1$

$f'(x) = 2\,\mathrm{e}^x - 2 = 2(\mathrm{e}^x - 1)$

b) **En déduire** la variation de f.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\mathrm{e}^x - 1$

Comme $\mathrm{e}^0 = 1$ et que la fonction exponentielle est croissante, on a:

si $x < 0$ alors $\mathrm{e}^x < 1$

si $x > 0$ alors $\mathrm{e}^x > 1$

On en déduit le tableau suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 2\times e^0 - 2\times 0 + 1 = 3$

c) Expliquer pourquoi cette étude prouve que le nombre $f(x)$ est strictement positif.

On vient de montrer que f atteint son minimum 3 en 0, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 3$ et comme $3 > 0$, il en résulte le nombre $f(x)$ est strictement positif.

Partie II-

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{12\,x\,e^x - 12\,e^x - 4\,x^3 + 3\,x^2}{6}$

1) **Étudier** la limite de g en $-\infty$.

En $-\infty$.

On sait: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} (-4x^3 + 3x^2) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-4x^3) = +\infty$. (limite d'un polynôme)

On a donc: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

En $+\infty$.

On admet que la limite en $+\infty$ est $+\infty$.

(La preuve est apportée en écrivant au numérateur: $12e^x(x - 1 - 4\dfrac{x^3}{e^x} + 3\dfrac{x^2}{e^x})$ et en appliquant une propriété qui sera démontrée lors du paragraphe " croissances comparées ". Cette propriété montre que la fonction exponentielle croît " infiniment plus vite " que tout polynôme, d'où, le quotient de forme $\dfrac{e^x}{P(x)}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ quel que soit le polynôme $P(x)$))

2) a) Montrer que g', fonction dérivée de g, est définie sur $\mathbb{R}$ par $g'(x) = f(x)\times x$

On remarque que $\dfrac{1}{6}$ est une constante, ou encore, on réécrit $g(x)$ sous la forme

$g(x) = 2xe^x - 2e^x - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$.

$g'(x) = (2\times 1\times e^x + 2x\times e^x) - 2e^x - \dfrac{2}{3}\times 3x^2 + \dfrac{1}{2}\times 2x = 2xe^x - 2x^2 + x = x(2xe^x - 2x + 1) = x\times f(x)$

b) Déterminer les variations de la fonction g.

Comme $f(x) > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de x, d'où, le tableau de variations suivants:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $g(0) = \ldots = -2$

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β tells que $\alpha < 0 < \beta$

On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles où la fonction est continue et strictement monotone.

0 n'étant pas solution de l'équation $g(x) = 0$, on peut considérer les intervalles ouverts en 0.

Sur $]-\infty; 0[$, la fonction g est:

- continue
- strictement décroissante
- l'intervalle image est $]-\infty; -2[$

Comme $0 \in]-\infty; -2]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution $\alpha \in]-\infty; 0[$.

La m^me démarche appliquée à $]0; +\infty[$ où g est strictement croissante montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution $\beta \in]0; +\infty[$.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution β.

Une première approche montre que $\beta \in [1; 2]$

puis avec un pas de 0,1, on montre que $\beta \in [1; 1,1]$

enfin avec un pas de 0,01, on obtient:

$g(1,03) \approx -0,03$ et $g(1,04) \approx +0,017$

Conclusion: $1,03 < \beta < 1,04$